Chapitre VI

Analyse du plan $S<A>\times B$

El Methni M.

VI-1. *A* et *B* sont deux facteurs à effets fixes

VI-1-1 Généralités

On considère le plan quasi-complet $S<A>\times B$ où les sujets sont répartis dans des groupes définis par les r modalités du facteur A. Chaque sujet est observé dans les différentes occasions définies par les c modalités du facteur B. Il y a n sujets par groupe. On a donc échantillonné $n\times r$ sujets et on dispose donc de $N=n\times r\times c$ observations $y_{s(i)j}$ que l'on présente sous la forme d'un tableau :

Sujets	a_1					…	a_i					…	a_r				
	b_1	…	b_j	…	b_c	…	b_1	…	b_j	…	b_c	…	b_1	…	b_j	…	b_c
1	$y_{1(1)1}$	…	$y_{1(1)j}$	…	$y_{1(1)c}$	…	$y_{1(i)1}$	…	$y_{1(i)j}$	…	$y_{1(i)c}$	…	$y_{1(r)1}$	…	$y_{1(r)j}$	…	$y_{1(r)c}$
2	$y_{2(1)1}$	…	$y_{2(1)j}$	…	$y_{2(1)c}$	…	$y_{2(i)1}$	…	$y_{2(i)j}$	…	$y_{2(i)c}$	…	$y_{2(r)1}$	…	$y_{2(r)j}$	…	$y_{2(r)c}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
s	$y_{s(1)1}$	…	$y_{s(1)j}$	…	$y_{s(1)c}$	…	$y_{s(i)1}$	…	$y_{s(i)j}$	…	$y_{s(i)c}$	…	$y_{s(r)1}$	…	$y_{s(r)j}$	…	$y_{s(r)c}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	$y_{n(1)1}$	…	$y_{n(1)j}$	…	$y_{n(1)c}$	…	$y_{n(i)1}$	…	$y_{n(i)j}$	…	$y_{n(i)c}$	…	$y_{n(r)1}$	…	$y_{n(r)j}$	…	$y_{n(r)c}$

VI-1-2 Modèle univarié :

Les données peuvent être d'une part, considérées comme les $N = n\times r\times c$ observations d'une seule variable aléatoire Y dans les $N = n\times r\times c$ conditions expérimentales décrites par le croisement des trois facteurs S emboîté dans A et B. Elles peuvent d'autre part, être regardées comme les $n\times r$ observations d'un vecteur de c variables aléatoires. Ces deux points de vue conduisent à l'élaboration de deux modèles, le modèle mixte univarié dans le premier cas, et le modèle multivarié dans le second.

Comme pour les plans $S\times O$ et $S\times A\times B$ nous allons étudier le modèle mixte univarié dans lequel nous considérons que les modalités du facteur sujet ont été obtenues par échantillonnage, le facteur sujet est donc un facteur aléatoire. Les facteurs A et B sont des facteurs à effets fixes. Chaque donnée $y_{s(i)j}$ correspond alors à l'observation d'une variable aléatoire $Y_{s(i)j}$ et on pose le modèle mixte suivant :

$$Y_{s(i)j} = \mu_{ij} + \pi_{s(i)} + (\pi\beta)_{sj} + e_{s(i)j}$$

Pour chaque croisement des modalités s et j nous ne disposons que d'une seule observation, l'interaction $(\pi\beta)_{sj}$ sera confondue avec le résidu et on pose : $\varepsilon_{s(i)j}=(\pi\beta)_{sj} + e_{s(i)j}$

On a donc : $Y_{s(i)j} = \mu_{ij} + \pi_{s(i)} + \varepsilon_{s(i)j}$

Où

Les μ_{ij} (i =1, 2, …, r, j=1, 2, …, c) sont des constantes qui mesurent les effets fixes des modalités (i,j) du croisement $A\times B$

Les $\pi_{s(i)}$ (s = 1, 2, …, n, i =1, 2, …, r) sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) de loi $\mathcal{N}(0\,;\sigma^2_\pi)$ qui mesurent les effets aléatoires des modalités s du facteur S

Les résidus $\varepsilon_{s(i)j}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) de loi $\mathcal{N}(0\,;\sigma^2)$

De plus, on suppose que les résidus $\varepsilon_{s(i)j}$ sont indépendantes des $\pi_{s(i)}$.

Nous pouvons réécrire l'effet fixe de la modalité (i,j) sous la forme suivante :

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$$

Où :
Le paramètre μ s'interprète comme un niveau général de réponse commun pour l'ensemble des observations,
Le paramètre $\alpha_i = \mu_i - \mu$ s'interprète comme l'effet de la modalité *i* du facteur *A*
Le paramètre $\beta_j = \mu_j - \mu$ s'interprète comme l'effet de la modalité *j* du facteur *B*
Le paramètre $(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_i - \mu_j + \mu$ s'interprète comme l'effet d'interaction des modalités *i* et *j*.
Le modèle mixte univarié peut finalement s'écrire :

$$Y_{s(i)j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \pi_{s(i)} + \varepsilon_{s(i)j}$$

Où : les $Y_{s(i)j}$ sont des variables aléatoires de loi : $\mathcal{N}(\mu + \alpha_i + \beta_j\ ,\ \sigma_\pi^2 + \sigma^2)$

Une telle paramétrisation nécessite de rajouter les contraintes d'identifiabilité suivantes :

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0 \quad \sum_{j=1}^{c} \beta_i = 0 \quad \sum_{i=1}^{r} (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \sum_{j=1}^{c} (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

VI-1-3 Décomposition de la variation :

On note : $\bar{y}_{s(i)0}$ la moyenne des *c* observations de la modalité *s*(*i*) de l'emboîtement *S*<*A*>
$\bar{y}_{0(i)0}$ la moyenne des *nc* observations de la modalité *i* de *A*
$\bar{y}_{0(0)j}$ la moyenne des *nr* observations de la modalité *j* de *B*
$\bar{y}_{0(i)j}$ la moyenne des *n* observations de la modalité (*i*,*j*) du croisement *A*×*B* et $\bar{y}$ la moyenne générale

On commence par décomposer la variation totale en variation inter-sujets et variation intra-sujets :
$\mathbf{SCT}_{\text{obs}} = \mathbf{SC}_{\text{inter-sujets}} + \mathbf{SC}_{\text{intra-sujets}}$

$$\mathbf{SC}_{\text{inter-sujet}} = \mathbf{SCS}_{\text{obs}} = c\sum_{i}\sum_{s(i)} (\bar{y}_{s(i)0} - \bar{y})^2 = N \times \text{Variance des moyennes des sujets}$$

$$\mathbf{SC}_{\text{intra-sujet}} = \sum_{i}\sum_{s(i)}\sum_{j} (y_{s(i)j} - \bar{y}_{s(i)0})^2$$

On décompose la variation inter-sujets en variation inter *A* et variation intra *A*. On obtient :
$\mathbf{SC}_{\text{inter-sujets}} = \mathbf{SCS}_{\text{obs}} = \mathbf{SC}_{\text{inter } A} + \mathbf{SC}_{\text{intra } A}$ où :

$$\mathbf{SC}_{\text{inter } A} = \mathbf{SCA}_{\text{obs}} = nc\sum_{i=1}^{r} (\bar{y}_{0(i)0} - \bar{y})^2$$

$$\mathbf{SC}_{\text{intra } A} = \mathbf{SCS(A)}_{\text{obs}} = c\sum_{i}\sum_{s(i)} (\bar{y}_{s(i)0} - \bar{y}_{0(i)0})^2$$

La variation intra-sujets est due aux effets du facteur *B* et à l'effet des autres facteurs non contrôlés. L'effet du facteur *B* se fait à deux niveaux : effet principal et effet d'interaction avec *A*. On a :

$$\mathbf{SC}_{\text{intra-sujets}} = \mathbf{SC}B_{\text{obs}} + \mathbf{SC(}AB\mathbf{)}_{\text{obs}} + \mathbf{SCR}_{\text{obs}}$$

Avec : $\mathbf{SC(}AB\mathbf{)}_{\text{obs}} = \mathbf{SC(}A\times B\mathbf{)}_{\text{obs}} - \mathbf{SC(}A\mathbf{)}_{\text{obs}} - \mathbf{SC(}B\mathbf{)}_{\text{obs}}$
Conclusion : Dans le cas du plan complet *S*<*A*>×*B*, la variation totale se décompose de façon additive en :

$$\boxed{\mathbf{SCT}_{\text{obs}} = \mathbf{SC}A_{\text{obs}} + \mathbf{SC}S(A)_{\text{obs}} + \mathbf{SC}B_{\text{obs}} + \mathbf{SC}AB_{\text{obs}} + \mathbf{SCR}_{\text{obs}}}$$

De même on a la décomposition des degrés de liberté :

$$\boxed{N-1 = ncr-1 = (r-1)+r(n-1)+(c-1)+(r-1)(c-1)+r(c-1)(n-1)}$$

Les différentes sommes de carrées se calculent de façon habituelles par :

$$\mathbf{SCT}_{\text{obs}} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r} (y_{s(i)j} - \bar{y})^2 = N \times \text{variance de toutes les observations}$$

$\mathbf{SCA}_{\text{obs}} = nc\sum_{i=1}^{r}(\bar{y}_{0(i)0} - \bar{y})^2$ =N×variance des r moyennes par modalités de A

$\mathbf{SCS}_{\text{obs}} = c\sum_{s=1}^{n}(\bar{y}_{s(i)0} - \bar{y})^2$ =N×variance des r×n moyennes des sujets

$\mathbf{SCS(A)}_{\text{obs}} = \mathbf{SCS}_{\text{obs}} - \mathbf{SCA}_{\text{obs}}$

$\mathbf{SCB}_{\text{obs}} = nr\sum_{j=1}^{c}(\bar{y}_{0(0)j} - \bar{y})^2$ =N×variance des c moyennes par modalités de B

$\mathbf{SC(}\mathrm{A}\times\mathrm{B}\mathbf{)}_{\text{obs}} = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(\bar{y}_{0(i)j} - \bar{y})^2$ =N×variance des r×c moyennes par croisement de A et B

$\mathbf{SC}(\mathrm{AB})_{\text{obs}} = \mathbf{SC}(\mathrm{A}\times\mathrm{B})_{\text{obs}} - \mathbf{SCA}_{\text{obs}} - \mathbf{SCB}_{\text{obs}}$

$\mathbf{SCR}_{\text{obs}} = \mathbf{SCT}_{\text{obs}} - \mathbf{SCA}_{\text{obs}} - \mathbf{SCB}_{\text{obs}} - \mathbf{SC}(\mathrm{AB})_{\text{obs}} - \mathbf{SCS}(\mathrm{A})_{\text{obs}}$

Dans le cadre du modèle statistique ces sommes de carrés sont des réalisations de variables aléatoires dont on calcule les espérances et plus généralement les distributions des probabilités. On montre le théorème fondamental suivant :

Théorème : Sous les hypothèses du modèle, les statistiques **SCA**, **SCB**, **SCAB**, **SCS(A)**, et **SCR** sont indépendantes et d'espérance respective :

$$E(\mathbf{SCA}) = (r-1)(\sigma^2 + c\sigma_\pi^2) + \sum_i nc\alpha_i^2$$

$$E(\mathbf{SCS(A)}) = r(n-1)(\sigma^2 + c\sigma_\pi^2)$$

$$E(\mathbf{SCB}) = (c-1)(\sigma^2 + \sigma_{\beta\pi}^2) + \sum_j nr\beta_j^2$$

$$E(\mathbf{SC(AB)}) = (r-1)(c-1)(\sigma^2 + \sigma_{\beta\pi}^2) + \sum_i\sum_j n(\alpha\beta)_{ij}^2$$

$$E(\mathbf{SCR}) = r(c-1)(n-1)(\sigma^2 + \sigma_{\beta\pi}^2)$$

On ramène toutes les sommes de carrés à des moyennes de carrés en divisant par les degrés de liberté correspondants.

$$\mathbf{MCA} = \frac{\mathbf{SCA}}{r-1} \quad \mathbf{MCB} = \frac{\mathbf{SCB}}{c-1} \quad \mathbf{MCS(A)} = \frac{\mathbf{SCS(A)}}{r(n-1)} \quad \mathbf{MCAB} = \frac{\mathbf{SC(AB)}}{(r-1)(c-1)} \quad \mathbf{MCR} = \frac{\mathbf{SCR}}{r(n-1)(c-1)}$$

Ceci nous permet de réécrire le théorème précédent sous la forme suivante :

Théorème : Sous les hypothèses du modèle, les statistiques **MCA**, **MCB**, **MCS(A)**, **MCAB**, et **MCR** sont indépendantes et d'espérances respectives :

$$E(\mathbf{MCA}) = \sigma^2 + c\sigma_\pi^2 + \frac{1}{r-1}\sum_i nc\alpha_i^2$$

$$E(\mathbf{MCB}) = \sigma^2 + \sigma_{\beta\pi}^2 + \frac{1}{c-1}\sum_j nr\beta_j^2$$

$$E(\mathbf{MC(AB)}) = \sigma^2 + \sigma_{\beta\pi}^2 + \frac{1}{(r-1)(c-1)}\sum_i\sum_j n(\alpha\beta)_{ij}^2$$

$$E(\mathbf{MC(S(A))}) = \sigma^2 + c\sigma_\pi^2$$

$$E(\mathbf{MCR}) = \sigma^2 + \sigma_{\beta\pi}^2$$

Ceci nous permet de tester l'existence des différents effets des facteurs. On peut construire des tests indépendants sur chacune des sources de variations :

Test 1 :

hypothèse nulle $\mathbf{H_0}_A$: pas d'effet principal du facteur A $\Leftrightarrow (\forall i)\ \alpha_i = 0$ contre

l'hypothèse alternative : $\mathbf{H_1}_A$: il existe un effet principal du facteur A $\Leftrightarrow (\exists i)\ \alpha_i \neq 0$

> **Théorème :** sous l'hypothèse $\mathbf{H_0}_A$, la statistique $\mathbf{F_A} = \dfrac{\mathbf{MCA}}{\mathbf{MCS(A)}}$ suit une loi de Fischer à $r - 1$ et $r(n - 1)$ degrés de liberté.

Le test1 est alors défini au seuil de signification α par la règle de décision suivante :

si $\mathbf{F}_{A\ obs} \geq \lambda_\alpha$ alors on rejette l'hypothèse nulle

où λ_α est donné par l'équation : $\alpha = P(\mathbf{F}_A \geq \lambda_\alpha)$.

Test 2 :

hypothèse nulle $\mathbf{H_0}_B$: pas d'effet principal du facteur B $\Leftrightarrow (\forall j)\ \beta_j = 0$ contre

l'hypothèse alternative : $\mathbf{H_1}_B$: il existe un effet principal du facteur B $\Leftrightarrow (\exists j)\ \beta_j \neq 0$

> **Théorème :** sous l'hypothèse $\mathbf{H_0}_B$, la statistique $\mathbf{F_B} = \dfrac{\mathbf{MCB}}{\mathbf{MCR}}$ suit une loi de Fischer à $c - 1$ et $r(n - 1)(c - 1)$ degrés de liberté.

Le test2 est alors défini au seuil de signification α par la règle de décision suivante :

si $\mathbf{F}_{B\ obs} \geq \lambda_\alpha$ alors on rejette l'hypothèse nulle

où λ_α est donné par l'équation : $\alpha = P(\mathbf{F}_B \geq \lambda_\alpha)$.

Test 3 :

hypothèse nulle $\mathbf{H_0}_{AB}$: pas d'effet d'interaction $\Leftrightarrow (\forall i,j)\ (\alpha\beta)_{ij} = 0$ contre

l'hypothèse alternative : $\mathbf{H_1}_{AB}$: il existe une interaction $\Leftrightarrow (\exists i,j)\ (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

> **Théorème :** sous l'hypothèse $\mathbf{H_0}_{AB}$, la statistique $\mathbf{F_{AB}} = \dfrac{\mathbf{MC(AB)}}{\mathbf{MCR}}$ suit une loi de Fischer à $(r - 1)(c - 1)$ et $r(n - 1)(c - 1)$ degrés de liberté.

Le test3 est alors défini au seuil de signification α par la règle de décision suivante :

si $\mathbf{F}_{AB\ obs} \geq \lambda_\alpha$ alors on rejette l'hypothèse nulle

où λ_α est donné par l'équation : $\alpha = P(\mathbf{F}_{AB} \geq \lambda_\alpha)$.

On présente l'étude dans le tableau d'analyse de la variance :

Source	$\mathbf{SC}_{obs}$	ddl	$\mathbf{MC}_{obs}$	$\mathbf{F}_{obs}$
Intra-S :				
A	$\mathbf{SCA}_{obs}$	$r - 1$	$\mathbf{MCA}_{obs}$	$\mathbf{F}_{A\ obs}$
S(A)	$\mathbf{SCS(A)}_{obs}$	$r(n - 1)$	$\mathbf{MCS(A)}_{obs}$	
Inter-S :				
B	$\mathbf{SCB}_{obs}$	$c - 1$	$\mathbf{MCB}_{obs}$	$\mathbf{F}_{B\ obs}$
AB	$\mathbf{SC(AB)}_{obs}$	$(r - 1)(c - 1)$	$\mathbf{MC(AB)}_{obs}$	$\mathbf{F}_{AB\ obs}$
R	$\mathbf{SCR}_{obs}$	$r(c - 1)(n - 1)$	$\mathbf{MCR}_{obs}$	

Total	**SCT**$_{obs}$	N - 1		

VI-1-5 Condition de validation :

Le fait de mesurer plusieurs fois la variable réponse sur le même sujet introduit des corrélations entre les observations faites sur ce même sujet. Dans le cas du modèle mixte univarié on montre que :

$$\text{cov}(Y_{s(i)j}, Y_{s'(i')j'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } s(i) \neq s'(i') \\ \sigma_\pi^2 & \text{si } j \neq j' \\ \sigma_\pi^2 + \sigma^2 & \text{si } j = j' \end{cases}$$

$$cor(Y_{s(i)j}, Y_{s'(i')j'}) = \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2}$$

Dans le cas du modèle multivarié on considère que les données sont les réalisations de n vecteurs aléatoires de dimension rc. $Y_s=(Y_{s(i)1}, Y_{s(i)2}, \ldots, Y_{s(i)c})$ indépendants et de même loi normale caractérisés par : $E(Y_{s(i)j})=\mu_{ij}$ Var$(Y_{s(i)j})=\sigma^2_{ij}$ cov$(Y_{s(i)j}, Y_{s(i)j'}) = \text{cov}_{(i)jj'}$

Le modèle mixte univarié est donc un cas particulier du modèle multivarié correspondant aux hypothèses de circularité et d'homogénéité des <u>matrices des variances-covariances</u> Σ_ι (i =1, 2, …, r) de la forme :

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_\pi^2+\sigma^2 & \sigma_\pi^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 \\ \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2+\sigma^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 & \cdots & \sigma_\pi^2+\sigma^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 & \cdots & \sigma_\pi^2+\sigma^2 \end{bmatrix}$$

De même on peut considérer la matrice des <u>corrélations</u> ρ :

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2+\sigma^2} & \ldots & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2+\sigma^2} & \ldots & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2+\sigma^2} \\ \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2+\sigma^2} & 1 & \ldots & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2+\sigma^2} & \ldots & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2+\sigma^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2+\sigma^2} & \ldots & 1 & \ldots & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2+\sigma^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2+\sigma^2} & \ldots & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2+\sigma^2} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

V-1-6 Exemple :

Dans une expérience les sujets doivent estimer la longueur d'une barre métallique. Les barres présentées ont trois longueurs différentes. On forme deux groupes de 4 sujets distincts, dans chaque groupe on présente à chaque sujet trois barres de longueurs différentes …

	G 1			G 2		
Sujet	L 1	L 2	L 3	L 1	L 2	L 3
1	10	11	9	3	6	3
2	18	20	17	16	20	14
3	6	8	8	5	6	3
4	4	9	9	10	10	6

Pratique des calculs :

	G 1				G 2			
Sujet	L 1	L 2	L 3		L 1	L 2	L 3	
1	10	11	9	$\overline{y}_{1(1)0}=10$	3	6	3	$\overline{y}_{1(2)0}=4$
2	18	20	17	$\overline{y}_{2(1)0}=18,33$	16	20	14	$\overline{y}_{2(2)0}=16,67$
3	6	8	8	$\overline{y}_{3(1)0}=7,33$	5	6	3	$\overline{y}_{3(2)0}=4,67$
4	4	9	9	$\overline{y}_{4(1)0}=7,33$	10	10	6	$\overline{y}_{4(2)0}=8,67$
	$\overline{y}_{0(1)1}=9,5$	$\overline{y}_{0(1)2}=12$	$\overline{y}_{0(1)3}=10,75$		$\overline{y}_{0(2)1}=8,5$	$\overline{y}_{0(2)2}=10,5$	$\overline{y}_{0(2)3}=6,5$	
	$\overline{y}_{0(1)0}=10,75$				$\overline{y}_{0(2)0}=8,5$			
				$\overline{y}_{0(0)1}=9$ $\overline{y}_{0(0)2}=11,25$ $\overline{y}_{0(0)3}=8,625$				$\overline{y}=9,625$

Pratique des calculs : autre méthode

A \ B	L_1	L_2	L_3	moyennes
G_1	9,50	12,00	10,75	10,75
G_2	8,50	10,50	6,50	8,50
moyennes	9,00	11,25	8,625	9,625

A \ S	1	2	3	4
G_1	10,00	18,33	7,33	7,33
G_2	4,00	16,67	4,67	8,67

SCT=645,625 **SCS**=579,853 **SCA**=30,375 **SCB**=32,25

SC(A×B)=74,875 **SC**(AB)=12,25 **SC**S(A)=549,478 **SCR**=21,272

Tableau d'analyse de la variance :

Source	**SC**$_{obs}$	ddl	**MC**$_{obs}$	**F**$_{obs}$
Intra-S :				
A	**SCA**$_{obs}$=30,375	r - 1=1	**MCA**$_{obs}$=30,375	**F**$_{A\ obs}$=0,331
S(A)	**SCS(A)**$_{obs}$=549,478	$r(n$ - 1)=6	**MC(AS)**$_{obs}$=91,579	
Inter-S :				
B	**SCB**$_{obs}$=32,25	c - 1=2	**MCB**$_{obs}$=16,125	**F**$_{B\ obs}$=9,099
AB	**SC(AB)**$_{obs}$=12,25	$(r$ - 1)$(c$ - 1)=2	**MC(AB)**$_{obs}$=6,125	**F**$_{AB\ obs}$=3,4565
R	**SCR**$_{obs}$=21,272	$r(c$ - 1)$(n$ - 1)=12	**MCR**$_{obs}$=1,772	
Total	**SCT**$_{obs}$=645,625	N - 1=23		

Test de l'existence des différents effets :

Test 1 : Effet principal du facteur *A*

hypothèse nulle $\mathbf{H_0}_A$: pas d'effet principal du facteur A $\Leftrightarrow (\forall i)\ \alpha_i = 0$ contre

l'hypothèse alternative : $\mathbf{H_1}_A$: il existe un effet principal du facteur A $\Leftrightarrow (\exists i)\ \alpha_i \neq 0$

> **Théorème :** sous l'hypothèse $\mathbf{H_0}_A$, la statistique $\mathbf{F_A} = \dfrac{\mathbf{MCA}}{\mathbf{MCS(A)}}$ suit une loi de Fischer à r - 1 et $r(n$ - 1) degrés de liberté.

Le test1 est alors défini au seuil de signification α=5% par la règle de décision suivante :

si $\mathbf{F}_{A\ obs} \geq \lambda_\alpha$=10,1 alors on rejette l'hypothèse nulle

où λ_α est donné par l'équation : $\alpha = P(\mathbf{F}_A \geq \lambda_\alpha)$.

Or $\mathbf{F}_{A\ obs}$ =0,331<1 Dans ce cas particulier on considère 1/ $\mathbf{F}_{A\ obs}$ = 1/0,331=3,015 et la comparaison se fait par rapport à la valeur lue dans la table de Fisher en inversant les degrés de liberté. 3,015 < λ'_α=234 on en conclue qu'il n'y a pas d'effet principal du facteur *A*

Test 2 : Effet principal du facteur *B*

hypothèse nulle $\mathbf{H_0}_B$: pas d'effet principal du facteur B $\Leftrightarrow (\forall j)\ \beta_j = 0$ contre

l'hypothèse alternative : $\mathbf{H_1}_B$: il existe un effet principal du facteur B $\Leftrightarrow (\exists j)\ \beta_j \neq 0$

> **Théorème :** sous l'hypothèse $\mathbf{H_0}_B$, la statistique $\mathbf{F_B} = \dfrac{\mathbf{MCB}}{\mathbf{MCR}}$ suit une loi de Fischer à c - 1 et $r(n$ - 1)(c - 1) degrés de liberté.

Le test2 est alors défini au seuil de signification α par la règle de décision suivante :

si $\mathbf{F}_{B\ obs} \geq \lambda_\alpha$ =3,89 alors on rejette l'hypothèse nulle

où λ_α est donné par l'équation : $\alpha = P(\mathbf{F}_B \geq \lambda_\alpha)$.

Or $\mathbf{F}_{B\ obs}$ =9,099 > λ_α=3,89 on en conclue qu'il y a un effet principal du facteur *B*

Test 3 : Test de l'effet d'interaction des facteurs *A* et *B*

hypothèse nulle $\mathbf{H_0}_{AB}$: pas d'effet d'interaction $\Leftrightarrow (\forall i,j)\ (\alpha\beta)_{ij} = 0$ contre

l'hypothèse alternative : $\mathbf{H_1}_{AB}$: il existe une interaction $\Leftrightarrow (\exists i,j)\ (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

> **Théorème :** sous l'hypothèse $\mathbf{H_0}_{AB}$, la statistique $\mathbf{F_{AB}} = \dfrac{\mathbf{MC(AB)}}{\mathbf{MCR}}$ suit une loi de Fischer à (r - 1)(c - 1) et $r(n$ - 1)(c - 1) degrés de liberté.

Le test3 est alors défini au seuil de signification α par la règle de décision suivante :

si $\mathbf{F}_{AB\ obs} \geq \lambda_\alpha$ =3,89 alors on rejette l'hypothèse nulle

où λ_α est donné par l'équation : $\alpha = P(\mathbf{F}_{AB} \geq \lambda_\alpha)$.

Or $\mathbf{F}_{AB\ obs}$ =3,4565 < λ_α=3,89 on en conclue qu'il n'y a pas d'effet d'interaction des facteurs *A* et *B*

Condition de validation du modèle :
Calculons la matrice de variances covariances empirique (et aussi la matrice des corrélations) pour examiner la condition de validité du modèle mixte univarié.

Matrice des variances-covariances

Groupe 1 (A=G_1)

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 28,752 & & \\ 24,500 & 22,502 & \\ 17,875 & 17,000 & 13,188 \end{bmatrix} \end{array}$$

Groupe 2 (A=G_2)

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 22,500 & & \\ 27,750 & 32,750 & \\ 21,750 & 25,750 & 20,250 \end{bmatrix} \end{array}$$

On considère la matrice des variances-covariances « moyenne »

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 27,000 & & \\ 26,125 & 27,625 & \\ 19,813 & 21,375 & 16,719 \end{bmatrix} \end{array}$$

et la matrice des corrélations associée :

$$\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0,957 & 1 & \\ 0,933 & 0,995 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

La validité du modèle mixte univarié est considérée comme acquise.El Methni M.

VI-1. *A* et *B* sont deux facteurs à effets fixes

VI-1-1 Généralités

On considère le plan quasi-complet $S<A>\times B$ où les sujets sont répartis dans des groupes définis par les r modalités du facteur A. Chaque sujet est observé dans les différentes occasions définies par les c modalités du facteur B. Il y a n sujets par groupe. On a donc échantillonné $n\times r$ sujets et on dispose donc de $N=n\times r\times c$ observations $y_{s(i)j}$ que l'on présente sous la forme d'un tableau :

Sujets	a_1					…	a_i					…	a_r				
	b_1	…	b_j	…	b_c	…	b_1	…	b_j	…	b_c	…	b_1	…	b_j	…	b_c
1	$y_{1(1)1}$	…	$y_{1(1)j}$	…	$y_{1(1)c}$	…	$y_{1(i)1}$	…	$y_{1(i)j}$	…	$y_{1(i)c}$	…	$y_{1(r)1}$	…	$y_{1(r)j}$	…	$y_{1(r)c}$
2	$y_{2(1)1}$	…	$y_{2(1)j}$	…	$y_{2(1)c}$	…	$y_{2(i)1}$	…	$y_{2(i)j}$	…	$y_{2(i)c}$	…	$y_{2(r)1}$	…	$y_{2(r)j}$	…	$y_{2(r)c}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
s	$y_{s(1)1}$	…	$y_{s(1)j}$	…	$y_{s(1)c}$	…	$y_{s(i)1}$	…	$y_{s(i)j}$	…	$y_{s(i)c}$	…	$y_{s(r)1}$	…	$y_{s(r)j}$	…	$y_{s(r)c}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	$y_{n(1)1}$	…	$y_{n(1)j}$	…	$y_{n(1)c}$	…	$y_{n(i)1}$	…	$y_{n(i)j}$	…	$y_{n(i)c}$	…	$y_{n(r)1}$	…	$y_{n(r)j}$	…	$y_{n(r)c}$

VI-1-2 Modèle univarié :

Les données peuvent être d'une part, considérées comme les $N = n \times r \times c$ observations d'une seule variable aléatoire Y dans les $N = n \times r \times c$ conditions expérimentales décrites par le croisement des trois facteurs S emboîté dans A et B. Elles peuvent d'autre part, être regardées comme les $n \times r$ observations d'un vecteur de c variables aléatoires. Ces deux points de vue conduisent à l'élaboration de deux modèles, le modèle mixte univarié dans le premier cas, et le modèle multivarié dans le second.

Comme pour les plans $S \times O$ et $S \times A \times B$ nous allons étudier le modèle mixte univarié dans lequel nous considérons que les modalités du facteur sujet ont été obtenues par échantillonnage, le facteur sujet est donc un facteur aléatoire. Les facteurs A et B sont des facteurs à effets fixes. Chaque donnée $y_{s(i)j}$ correspond alors à l'observation d'une variable aléatoire $Y_{s(i)j}$ et on pose le modèle mixte suivant :

$$Y_{s(i)j} = \mu_{ij} + \pi_{s(i)} + (\pi\beta)_{sj} + e_{s(i)j}$$

Pour chaque croisement des modalités s et j nous ne disposons que d'une seule observation, l'interaction $(\pi\beta)_{sj}$ sera confondue avec le résidu et on pose : $\varepsilon_{s(i)j}=(\pi\beta)_{sj} + e_{s(i)j}$

On a donc : $Y_{s(i)j} = \mu_{ij} + \pi_{s(i)} + \varepsilon_{s(i)j}$

Où

Les μ_{ij} (i =1, 2, …, r, j=1, 2, …, c) sont des constantes qui mesurent les effets fixes des modalités (i,j) du croisement $A \times B$

Les $\pi_{s(i)}$ (s = 1, 2, …, n, i =1, 2, …, r) sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) de loi $\mathcal{N}(0 ;\sigma^2_\pi)$ qui mesurent les effets aléatoires des modalités s du facteur S

Les résidus $\varepsilon_{s(i)j}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) de loi $\mathcal{N}(0 ;\sigma^2)$

De plus, on suppose que les résidus $\varepsilon_{s(i)j}$ sont indépendantes des $\pi_{s(i)}$.

Nous pouvons réécrire l'effet fixe de la modalité (i,j) sous la forme suivante :

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$$

Où :

Le paramètre μ s'interprète comme un niveau général de réponse commun pour l'ensemble des observations,

Le paramètre $\alpha_i = \mu_i - \mu$ s'interprète comme l'effet de la modalité i du facteur A

Le paramètre $\beta_j = \mu_j - \mu$ s'interprète comme l'effet de la modalité j du facteur B

Le paramètre $(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_i - \mu_j + \mu$ s'interprète comme l'effet d'interaction des modalités i et j.

Le modèle mixte univarié peut finalement s'écrire :

$$Y_{s(i)j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \pi_{s(i)} + \varepsilon_{s(i)j}$$

Où : les $Y_{s(i)j}$ sont des variables aléatoires de loi : $\mathcal{N}(\mu + \alpha_i + \beta_j \, , \sigma^2_\pi + \sigma^2)$

Une telle paramétrisation nécessite de rajouter les contraintes d'identifiabilité suivantes :

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0 \quad \sum_{j=1}^{c} \beta_i = 0 \quad \sum_{i=1}^{r} (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \sum_{j=1}^{c} (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

VI-1-3 Décomposition de la variation :

On note : $\overline{y}_{s(i)0}$ la moyenne des c observations de la modalité $s(i)$ de l'emboîtement S<A>

$\overline{y}_{0(i)0}$ la moyenne des nc observations de la modalité i de A

$\overline{y}_{0(0)j}$ la moyenne des nr observations de la modalité j de B

$\overline{y}_{0(i)j}$ la moyenne des n observations de la modalité (i,j) du croisement $A \times B$ et $\overline{y}$ la moyenne générale

On commence par décomposer la variation totale en variation inter-sujets et variation intra-sujets :
$\mathbf{SCT}_{\text{obs}} = \mathbf{SC}_{\text{inter-sujets}} + \mathbf{SC}_{\text{intra-sujets}}$

$$\mathbf{SC}_{\text{inter-sujet}} = \mathbf{SCS}_{\text{obs}} = c\sum_{i}\sum_{s(i)}(\bar{y}_{s(i)0} - \bar{y})^2 = N \times \text{Variance des moyennes des sujets}$$

$$\mathbf{SC}_{\text{intra-sujet}} = \sum_{i}\sum_{s(i)}\sum_{j}(y_{s(i)j} - \bar{y}_{s(i)0})^2$$

On décompose la variation inter-sujets en variation inter *A* et variation intra *A*. On obtient :
$\mathbf{SC}_{\text{inter-sujets}} = \mathbf{SCS}_{\text{obs}} = \mathbf{SC}_{\text{inter } A} + \mathbf{SC}_{\text{intra } A}$ où :

$$\mathbf{SC}_{\text{inter } A} = \mathbf{SCA}_{\text{obs}} = nc\sum_{i=1}^{r}(\bar{y}_{0(i)0} - \bar{y})^2$$

$$\mathbf{SC}_{\text{intra } A} = \mathbf{SCS(A)}_{\text{obs}} = c\sum_{i}\sum_{s(i)}(\bar{y}_{s(i)0} - \bar{y}_{0(i)0})^2$$

La variation intra-sujets est due aux effets du facteur *B* et à l'effet des autres facteurs non contrôlés.
L'effet du facteur *B* se fait à deux niveaux : effet principal et effet d'interaction avec *A*. On a :

$$\mathbf{SC}_{\text{intra-sujets}} = \mathbf{SC}B_{\text{obs}} + \mathbf{SC}(AB)_{\text{obs}} + \mathbf{SCR}_{\text{obs}}$$

Avec : $\mathbf{SC}(AB)_{\text{obs}} = \mathbf{SC}(A\times B)_{\text{obs}} - \mathbf{SC}(A)_{\text{obs}} - \mathbf{SC}(B)_{\text{obs}}$

Conclusion : Dans le cas du plan complet $S<A>\times B$, la variation totale se décompose de façon additive en :

$$\boxed{\mathbf{SCT}_{\text{obs}} = \mathbf{SC}A_{\text{obs}} + \mathbf{SC}S(A)_{\text{obs}} + \mathbf{SC}B_{\text{obs}} + \mathbf{SC}AB_{\text{obs}} + \mathbf{SCR}_{\text{obs}}}$$

De même on a la décomposition des degrés de liberté :

$$\boxed{N\text{-}1 = ncr\text{-}1 = (r\text{-}1)+r(n\text{-}1)+(c\text{-}1)+(r\text{-}1)(c\text{-}1)+r(c\text{-}1)(n\text{-}1)}$$

Les différentes sommes de carrées se calculent de façon habituelles par :

$$\mathbf{SCT}_{\text{obs}} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{r}(y_{s(i)j} - \bar{y})^2 = N\times\text{variance de toutes les observations}$$

$$\mathbf{SCA}_{\text{obs}} = nc\sum_{i=1}^{r}(\bar{y}_{0(i)0} - \bar{y})^2 = N\times\text{variance des } r \text{ moyennes par modalités de } A$$

$$\mathbf{SCS}_{\text{obs}} = c\sum_{s=1}^{n}(\bar{y}_{s(i)0} - \bar{y})^2 = N\times\text{variance des } r\times n \text{ moyennes des sujets}$$

$\mathbf{SC}\text{S(A)}_{\text{obs}} = \mathbf{SCS}_{\text{obs}} - \mathbf{SCA}_{\text{obs}}$

$$\mathbf{SCB}_{\text{obs}} = nr\sum_{j=1}^{c}(\bar{y}_{0(0)j} - \bar{y})^2 = N\times\text{variance des } c \text{ moyennes par modalités de } B$$

$$\mathbf{SC}(\text{A}\times\text{B})_{\text{obs}} = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(\bar{y}_{0(i)j} - \bar{y})^2 = N\times\text{variance des } r\times c \text{ moyennes par croisement de } A \text{ et } B$$

$\mathbf{SC}(\text{AB})_{\text{obs}} = \mathbf{SC}(\text{A}\times\text{B})_{\text{obs}} - \mathbf{SCA}_{\text{obs}} - \mathbf{SCB}_{\text{obs}}$
$\mathbf{SCR}_{\text{obs}} = \mathbf{SCT}_{\text{obs}} - \mathbf{SCA}_{\text{obs}} - \mathbf{SCB}_{\text{obs}} - \mathbf{SC}(\text{AB})_{\text{obs}} - \mathbf{SC}\text{S(A)}_{\text{obs}}$

Dans le cadre du modèle statistique ces sommes de carrés sont des réalisations de variables aléatoires dont on calcule les espérances et plus généralement les distributions des probabilités.
On montre le théorème fondamental suivant :

Théorème : Sous les hypothèses du modèle, les statistiques **SCA**, **SCB**, **SCAB**, **SCS(A)**, et **SCR** sont indépendantes et d'espérance respective :

$$E(\mathbf{SCA}) = (r-1)(\sigma^2 + c\sigma_\pi^2) + \sum_i nc\alpha_i^2$$
$$E(\mathbf{SCS(A)}) = r(n-1)(\sigma^2 + c\sigma_\pi^2)$$
$$E(\mathbf{SCB}) = (c-1)(\sigma^2 + \sigma_{\beta\pi}^2) + \sum_j nr\beta_j^2$$
$$E(\mathbf{SC(AB)}) = (r-1)(c-1)(\sigma^2 + \sigma_{\beta\pi}^2) + \sum_i\sum_j n(\alpha\beta)_{ij}^2$$
$$E(\mathbf{SCR}) = r(c-1)(n-1)(\sigma^2 + \sigma_{\beta\pi}^2)$$

On ramène toutes les sommes de carrés à des moyennes de carrés en divisant par les degrés de liberté correspondants.

$$\mathbf{MCA} = \frac{\mathbf{SCA}}{r-1} \quad \mathbf{MCB} = \frac{\mathbf{SCB}}{c-1} \quad \mathbf{MCS(A)} = \frac{\mathbf{SCS(A)}}{r(n-1)} \quad \mathbf{MCAB} = \frac{\mathbf{SC(AB)}}{(r-1)(c-1)} \quad \mathbf{MCR} = \frac{\mathbf{SCR}}{r(n-1)(c-1)}$$

Ceci nous permet de réécrire le théorème précédent sous la forme suivante :

Théorème : Sous les hypothèses du modèle, les statistiques **MCA**, **MCB**, **MCS(A)**, **MCAB**, et **MCR** sont indépendantes et d'espérances respectives :

$$E(\mathbf{MCA}) = \sigma^2 + c\sigma_\pi^2 + \frac{1}{r-1}\sum_i nc\alpha_i^2$$
$$E(\mathbf{MCB}) = \sigma^2 + \sigma_{\beta\pi}^2 + \frac{1}{c-1}\sum_j nr\beta_j^2$$
$$E(\mathbf{MC(AB)}) = \sigma^2 + \sigma_{\beta\pi}^2 + \frac{1}{(r-1)(c-1)}\sum_i\sum_j n(\alpha\beta)_{ij}^2$$
$$E(\mathbf{MC(S(A))}) = \sigma^2 + c\sigma_\pi^2$$
$$E(\mathbf{MCR}) = \sigma^2 + \sigma_{\beta\pi}^2$$

Ceci nous permet de tester l'existence des différents effets des facteurs. On peut construire des tests indépendants sur chacune des sources de variations :

Test 1 :

hypothèse nulle $\mathbf{H_0}_A$: pas d'effet principal du facteur A $\Leftrightarrow (\forall i)\ \alpha_i = 0$ contre

l'hypothèse alternative : $\mathbf{H_1}_A$: il existe un effet principal du facteur A $\Leftrightarrow (\exists i)\ \alpha_i \neq 0$

Théorème : sous l'hypothèse $\mathbf{H_0}_A$, la statistique $\mathbf{F_A} = \dfrac{\mathbf{MCA}}{\mathbf{MCS(A)}}$ suit une loi de Fischer à r - 1 et $r(n$ - 1) degrés de liberté.

Le test1 est alors défini au seuil de signification α par la règle de décision suivante :

si $\mathbf{F}_{A\ obs} \geq \lambda_\alpha$ alors on rejette l'hypothèse nulle

où λ_α est donné par l'équation : $\alpha = P(\mathbf{F}_A \geq \lambda_\alpha)$.

Test 2 :

hypothèse nulle $\mathbf{H_0}_B$: pas d'effet principal du facteur B $\Leftrightarrow (\forall j)\ \beta_j = 0$ contre

l'hypothèse alternative : $\mathbf{H_1}_B$: il existe un effet principal du facteur B $\Leftrightarrow (\exists j)\ \beta_j \neq 0$

Théorème : sous l'hypothèse $\mathbf{H_{0}}_{\mathrm{B}}$, la statistique $\mathbf{F_B} = \dfrac{\mathbf{MCB}}{\mathbf{MCR}}$ suit une loi de Fischer à c - 1 et $r(n - 1)(c - 1)$ degrés de liberté.

Le test2 est alors défini au seuil de signification α par la règle de décision suivante :

si $\mathbf{F}_{\mathrm{B\ obs}} \geq \lambda_\alpha$ alors on rejette l'hypothèse nulle

où λ_α est donné par l'équation : $\alpha = P(\mathbf{F}_{\mathrm{B}} \geq \lambda_\alpha)$.

Test 3 :

hypothèse nulle $\mathbf{H_0}_{\mathrm{AB}}$: pas d'effet d'interaction $\Leftrightarrow (\forall i,j)\ (\alpha\beta)_{ij} = 0$ contre

l'hypothèse alternative : $\mathbf{H_1}_{\mathrm{AB}}$: il existe une interaction $\Leftrightarrow (\exists i,j)\ (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

Théorème : sous l'hypothèse $\mathbf{H_0}_{\mathrm{AB}}$, la statistique $\mathbf{F_{AB}} = \dfrac{\mathbf{MC(AB)}}{\mathbf{MCR}}$ suit une loi de Fischer à $(r - 1)(c - 1)$ et $r(n - 1)(c - 1)$ degrés de liberté.

Le test3 est alors défini au seuil de signification α par la règle de décision suivante :

si $\mathbf{F}_{\mathrm{AB\ obs}} \geq \lambda_\alpha$ alors on rejette l'hypothèse nulle

où λ_α est donné par l'équation : $\alpha = P(\mathbf{F}_{\mathrm{AB}} \geq \lambda_\alpha)$.

On présente l'étude dans le tableau d'analyse de la variance :

Source	$\mathbf{SC}_{\mathrm{obs}}$	ddl	$\mathbf{MC}_{\mathrm{obs}}$	$\mathbf{F}_{\mathrm{obs}}$
Intra-S :				
A	$\mathbf{SCA}_{\mathrm{obs}}$	$r - 1$	$\mathbf{MCA}_{\mathrm{obs}}$	$\mathbf{F}_{\mathrm{A\ obs}}$
S(A)	$\mathbf{SCS(A)}_{\mathrm{obs}}$	$r(n - 1)$	$\mathbf{MCS(A)}_{\mathrm{obs}}$	
Inter-S :				
B	$\mathbf{SCB}_{\mathrm{obs}}$	$c - 1$	$\mathbf{MCB}_{\mathrm{obs}}$	$\mathbf{F}_{\mathrm{B\ obs}}$
AB	$\mathbf{SC(AB)}_{\mathrm{obs}}$	$(r - 1)(c - 1)$	$\mathbf{MC(AB)}_{\mathrm{obs}}$	$\mathbf{F}_{\mathrm{AB\ obs}}$
R	$\mathbf{SCR}_{\mathrm{obs}}$	$r(c - 1)(n - 1)$	$\mathbf{MCR}_{\mathrm{obs}}$	
Total	$\mathbf{SCT}_{\mathrm{obs}}$	$N - 1$		

VI-1-5 Condition de validation :

Le fait de mesurer plusieurs fois la variable réponse sur le même sujet introduit des corrélations entre les observations faites sur ce même sujet. Dans le cas du modèle mixte univarié on montre que :

$$\operatorname{cov}(Y_{s(i)j}, Y_{s'(i')j'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } s(i) \neq s'(i') \\ \sigma_\pi^2 & \text{si } j \neq j' \\ \sigma_\pi^2 + \sigma^2 & \text{si } j = j' \end{cases}$$

$$cor(Y_{s(i)j}, Y_{s'(i')j'}) = \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2}$$

Dans le cas du modèle multivarié on considère que les données sont les réalisations de n vecteurs aléatoires de dimension rc. $Y_s = (Y_{s(i)1}, Y_{s(i)2}, \ldots, Y_{s(i)c})$ indépendants et de même loi normale caractérisés par : $E(Y_{s(i)j}) = \mu_{ij}$ $\quad \mathrm{Var}(Y_{s(i)j}) = \sigma^2_{ij}$ $\quad \operatorname{cov}(Y_{s(i)j}, Y_{s(i)j'}) = \operatorname{cov}_{(i)jj'}$

Le modèle mixte univarié est donc un cas particulier du modèle multivarié correspondant aux hypothèses de circularité et d'homogénéité des <u>matrices des variances-covariances</u> Σ_ι (i =1, 2, …, r) de la forme :

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_\pi^2 + \sigma^2 & \sigma_\pi^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 \\ \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 + \sigma^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 + \sigma^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 & \cdots & \sigma_\pi^2 + \sigma^2 \end{bmatrix}$$

De même on peut considérer la matrice des <u>corrélations</u> ρ :

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2} & \dots & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2} & \dots & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2} \\ \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2} & 1 & \dots & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2} & \dots & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2} & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2} & \dots & 1 & \dots & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2} & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2} & \dots & \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma^2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

V-1-6 Exemple :

Dans une expérience les sujets doivent estimer la longueur d'une barre métallique. Les barres présentées ont trois longueurs différentes. On forme deux groupes de 4 sujets distincts, dans chaque groupe on présente à chaque sujet trois barres de longueurs différentes …

	G 1			G 2		
Sujet	L 1	L 2	L 3	L 1	L 2	L 3
1	10	11	9	3	6	3
2	18	20	17	16	20	14
3	6	8	8	5	6	3
4	4	9	9	10	10	6

Pratique des calculs :

	G 1				G 2			
Sujet	L 1	L 2	L 3		L 1	L 2	L 3	
1	10	11	9	$\overline{y}_{1(1)0}=10$	3	6	3	$\overline{y}_{1(2)0}=4$
2	18	20	17	$\overline{y}_{2(1)0}=18,33$	16	20	14	$\overline{y}_{2(2)0}=16,67$
3	6	8	8	$\overline{y}_{3(1)0}=7,33$	5	6	3	$\overline{y}_{3(2)0}=4,67$
4	4	9	9	$\overline{y}_{4(1)0}=7,33$	10	10	6	$\overline{y}_{4(2)0}=8,67$
	$\overline{y}_{0(1)1}=9,5$	$\overline{y}_{0(1)2}=12$	$\overline{y}_{0(1)3}=10,75$		$\overline{y}_{0(2)1}=8,5$	$\overline{y}_{0(2)2}=10,5$	$\overline{y}_{0(2)3}=6,5$	
	$\overline{y}_{0(1)0}=10,75$				$\overline{y}_{0(2)0}=8,5$			
				$\overline{y}_{0(0)1}=9$ $\overline{y}_{0(0)2}=11,25$ $\overline{y}_{0(0)3}=8,625$				$\overline{y}=9,625$

Pratique des calculs : autre méthode

A \ B	L_1	L_2	L_3	moyennes
G_1	9,50	12,00	10,75	10,75
G_2	8,50	10,50	6,50	8,50
moyennes	9,00	11,25	8,625	9,625

A \ S	1	2	3	4
G_1	10,00	18,33	7,33	7,33
G_2	4,00	16,67	4,67	8,67

SCT=645,625 **SCS**=579,853 **SCA**=30,375 **SCB**=32,25

SC(A×B)=74,875 **SC**(AB)=12,25 **SC**S(A)=549,478 **SCR**=21,272

Tableau d'analyse de la variance :

Source	$\mathbf{SC}_{obs}$	ddl	$\mathbf{MC}_{obs}$	$\mathbf{F}_{obs}$
Intra-S :				
A	$\mathbf{SCA}_{obs}=30,375$	r - 1=1	$\mathbf{MCA}_{obs}=30,375$	$\mathbf{F}_{A\ obs}=0,331$
S(A)	$\mathbf{SCS(A)}_{obs}=549,478$	$r(n$ - 1)=6	$\mathbf{MC(AS)}_{obs}=91,579$	
Inter-S :				
B	$\mathbf{SCB}_{obs}=32,25$	c - 1=2	$\mathbf{MCB}_{obs}=16,125$	$\mathbf{F}_{B\ obs}=9,099$
AB	$\mathbf{SC(AB)}_{obs}=12,25$	$(r$ - 1)$(c$ - 1)=2	$\mathbf{MC(AB)}_{obs}=6,125$	$\mathbf{F}_{AB\ obs}=3,4565$
R	$\mathbf{SCR}_{obs}=21,272$	$r(c$ - 1)$(n$ - 1)=12	$\mathbf{MCR}_{obs}=1,772$	
Total	$\mathbf{SCT}_{obs}=645,625$	N - 1=23		

Test de l'existence des différents effets :

Test 1 : Effet principal du facteur *A*
hypothèse nulle $\mathbf{H_0}$A : pas d'effet principal du facteur A $\Leftrightarrow(\forall i)\ \alpha_i = 0$ contre
l'hypothèse alternative : $\mathbf{H_1}$A : il existe un effet principal du facteur A $\Leftrightarrow(\exists i)\ \alpha_i \neq 0$

Théorème : sous l'hypothèse $\mathbf{H_0}$A, la statistique $\mathbf{F_A} = \dfrac{\mathbf{MCA}}{\mathbf{MCS(A)}}$ suit une loi de Fischer à r - 1 et $r(n$ - 1) degrés de liberté.

Le test1 est alors défini au seuil de signification α=5% par la règle de décision suivante :
si $\mathbf{F}_{A\ obs} \geq \lambda_\alpha$=10,1 alors on rejette l'hypothèse nulle
où λ_α est donné par l'équation : $\alpha = P(\mathbf{F}_A \geq \lambda_\alpha)$.
Or $\mathbf{F}_{A\ obs}$ =0,331<1 Dans ce cas particulier on considère 1/ $\mathbf{F}_{A\ obs}$ = 1/0,331=3,015 et la comparaison se fait par rapport à la valeur lue dans la table de Fisher en inversant les degrés de liberté. 3,015 < λ'_α=234 on en conclue qu'il n'y a pas d'effet principal du facteur *A*

Test 2 : Effet principal du facteur *B*
hypothèse nulle $\mathbf{H_0}$B : pas d'effet principal du facteur B $\Leftrightarrow(\forall j)\ \beta_j = 0$ contre
l'hypothèse alternative : $\mathbf{H_1}$B : il existe un effet principal du facteur B $\Leftrightarrow(\exists j)\ \beta_j \neq 0$

Théorème : sous l'hypothèse $\mathbf{H_0}$B, la statistique $\mathbf{F_B} = \dfrac{\mathbf{MCB}}{\mathbf{MCR}}$ suit une loi de Fischer à c - 1 et $r(n$ - 1)(c - 1) degrés de liberté.

Le test2 est alors défini au seuil de signification α par la règle de décision suivante :
si $\mathbf{F}_{B\ obs} \geq \lambda_\alpha$ =3,89 alors on rejette l'hypothèse nulle
où λ_α est donné par l'équation : $\alpha = P(\mathbf{F}_B \geq \lambda_\alpha)$.
Or $\mathbf{F}_{B\ obs}$ =9,099 > λ_α=3,89 on en conclue qu'il y a un effet principal du facteur *B*

Test 3 : Test de l'effet d'interaction des facteurs *A* et *B*
hypothèse nulle $\mathbf{H_0}$AB : pas d'effet d'interaction $\Leftrightarrow(\forall i,j)\ (\alpha\beta)_{ij} = 0$ contre
l'hypothèse alternative : $\mathbf{H_1}$AB : il existe une interaction $\Leftrightarrow(\exists i,j)\ (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$

Théorème : sous l'hypothèse $\mathbf{H_0}$AB, la statistique $\mathbf{F_{AB}} = \dfrac{\mathbf{MC(AB)}}{\mathbf{MCR}}$ suit une loi de Fischer à (r - 1)(c - 1) et $r(n$ - 1)(c - 1) degrés de liberté.

Le test3 est alors défini au seuil de signification α par la règle de décision suivante :
si $\mathbf{F}_{AB\ obs} \geq \lambda_\alpha$ =3,89 alors on rejette l'hypothèse nulle
où λ_α est donné par l'équation : $\alpha = P(\mathbf{F}_{AB} \geq \lambda_\alpha)$.
Or $\mathbf{F}_{AB\ obs}$ =3,4565 < λ_α=3,89 on en conclue qu'il n'y a pas d'effet d'interaction des facteurs *A* et *B*

Condition de validation du modèle :
Calculons la matrice de variances covariances empirique (et aussi la matrice des corrélations) pour examiner la condition de validité du modèle mixte univarié.

Matrice des variances-covariances

Groupe 1 (A=G_1)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 28,752 & & \\ 24,500 & 22,502 & \\ 17,875 & 17,000 & 13,188 \end{bmatrix} \end{array}$$

Groupe 2 (A=G_2)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 22,500 & & \\ 27,750 & 32,750 & \\ 21,750 & 25,750 & 20,250 \end{bmatrix} \end{array}$$

On considère la matrice des variances-covariances « moyenne »

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 27,000 & & \\ 26,125 & 27,625 & \\ 19,813 & 21,375 & 16,719 \end{bmatrix} \end{array}$$

et la matrice des corrélations associée :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0,957 & 1 & \\ 0,933 & 0,995 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

La validité du modèle mixte univarié est considérée comme acquise.