Travaux Dirigés N°8
Espaces et sous-espaces vectoriels

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Soit $\mathbf{R}^2 = \{u = (x,y) \text{ tq } x \in \mathbf{R} \text{ et } y \in \mathbf{R}\}$ muni de l'addition habituelle des couples. On y définit la multiplication par un scalaire de la manière suivante :

$$\forall\lambda \in \mathbf{R} \qquad \forall u = (x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad \lambda u = \lambda(x,y) = (\lambda x, 0)$$

Quelle est l'axiome de la structure d'espace vectoriel qui n'est pas vérifié? Que peut-on en conclure?

EXERCICE II :

Soit x et a deux vecteurs d'un **R**-ev E. On considère l'équation d'inconnue x et de paramètre a :
$4(x - 2a) - 0,5(2x + a) = 1,5(x + a)$

1) Résoudre cette équation en détaillant toutes les étapes et citant à chaque étape l'axiome (de la définition d'un espace vectoriel) utilisé.

2) En comparant aux calculs usuels dans **R** ou dans **C**, quelle est l'opération « interdite » ? (non définie).

EXERCICE III :

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ tq } (x, y) \in \mathrm{R}^2 \right\}$ Montrer que E est un **R**-espace vectoriel

EXERCICE IV :

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ et les sous-ensembles suivants :

a) $E = \left\{ v \in \mathbf{R}^3 \text{ tq } v = (x,0,0) \quad x \in \mathbf{R} \right\}$ **b)** $F = \left\{ v \in \mathbf{R}^3 \text{ tq } v = (x,1,1) \quad x \in \mathbf{R} \right\}$

c) $G = \left\{ v \in \mathbf{R}^3 \text{ tq } v = (x,y,z) \text{ avec } x + z = y \right\}$ **d)** $H = \left\{ v \in \mathbf{R}^3 \text{ tq } v = (x,y,z) \text{ avec } x = 2y \right\}$

1) Donner quelques éléments de chacun de ses sous-ensembles

2) Lesquels de ces sous-ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$?

EXERCICE V :

1) On considère les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$

$A=\{u=(x,y)\in\mathbf{R}^2 \text{ tq } x>y\}$ $B=\{u=(x,y)\in\mathbf{R}^2 \text{ tq } x-y=1\}$

$C=\{u=(x,y)\in\mathbf{R}^2 \text{ tq } x^2=y\}$ $D=\{u=(x,y)\in\mathbf{R}^2 \text{ tq } x-y=0\}$

Représenter graphiquement ces sous-ensembles et indiquer les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.

2) Donner un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ stable pour l'addition et pour l'opposé et qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

EXERCICE VI :

Soit $\mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. On considère les sous-ensembles suivants

a) $E = \left\{ p(x) \in \mathbf{R}_3[\mathrm{X}] \text{ tq } p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \text{ avec } a_0 = 1 \right\}$

b) $E = \left\{ p(x) \in \mathbf{R}_3[\mathrm{X}] \text{ tq } p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \text{ avec } a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\}$

c) $E = \left\{ p(x) \in \mathbf{R}_3[\mathrm{X}] \text{ tq } p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \text{ avec } (a_0;a_1;a_2;a_3) \in \mathbf{Z}^4 \right\}$

1) Donner quelques éléments de chacun de ses sous-ensembles

2) Lesquels de ces sous-ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}_3[X]$?

EXERCICE VII : (D'après examen)

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E = \left\{ M_{x,y} = xI + yJ \text{ tq } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \right\}$

Montrer que E est un **R**-ev pour les opérations habituelles.

EXERCICE VIII :

1) Le vecteur u=(3,10,-7,5) appartient-il au sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par les deux vecteurs : x=(1,4,-5,2) et y = (1,2,3,1)?

2) Déterminer λ et μ de façon que le vecteur (λ,μ,-25,-1) appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par x = (1,4,-5,2) et y = (1,2,3,1)

EXERCICE IX :

1) Donner deux sous-espaces vectoriels *A* et *B* d'un espace vectoriel *E* dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel de *E*.

2) Montrer que l'union de deux sous-espaces vectoriels *A* et *B* d'un espace vectoriel *E* est un sous-espace vectoriel de *E* si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.