

EXERCICE I :

Reconnaître, parmi les matrices suivantes, celles qui sont ligne réduites et celles qui sont ligne réduites échelonnées et dire pourquoi les autres ne le sont pas. Trouver les matrices l.r.e de ces dernières :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{pmatrix}$$

EXERCICE II :

Donner toutes les formes générales des matrices ligne-réduites échelonnées de format 2×3 de rang 1 et de rang 2.

EXERCICE III :

Il est connu (voir cours) que si A et B sont ligne-équivalentes alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.
Montrer que la réciproque est fausse.

EXERCICE IV :

1) Donner le rang des matrices A_i suivantes : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Soit R_i la matrice ligne-réduite échelonnée de A_i $i=1, 2, 3$

a) Calculer A_1A_3 A_2A_3 R_1R_3 et R_2R_3

b) Calculer $\text{rang}(A_1A_3)$ $\text{rang}(A_2A_3)$ $\text{rang}(R_1R_3)$ et $\text{rang}(R_2R_3)$

Que peut-on en conclure?

EXERCICE V :

1) Trouver la matrice l.r.e R associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et déterminer une matrice P telle que

$$R = PA$$

2) Quel est le rang de A ?

3) Vérifier que les lignes non nulles de R sont linéairement indépendantes

4) Vérifier que les colonnes pivots de R sont linéairement indépendantes

5) Vérifier que les colonnes non pivots de R sont des combinaisons linéaires des colonnes pivots d'indices inférieurs

6) Donner les combinaisons linéaires entre les colonnes de A .

EXERCICE VI :

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R})$ avec $\forall i=1, \dots, n \quad \forall j=1, \dots, p \quad a_{ij} = i+j-1$

1) Pour $n=4$ et $p=5$

a) Donner une suite d'opérations élémentaires de lignes transformant A en une matrice ayant la même première ligne que A et dont tous les autres coefficients valent 1

b) En déduire la l.r.e de A .

2) Pour $n=50$ et $p=100$

a) Décrire une suite d'opérations élémentaires de lignes transformant A en une matrice ayant la même première ligne que A et dont tous les autres coefficients valent 1

b) En déduire la forme générale de la l.r.e de A .

3) Quel est le rang de A pour n et p quelconques ?

EXERCICE VII :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3+2\lambda & -2\lambda & -3 & 2\lambda \\ -2+\lambda & -\lambda & -2 & \lambda \\ 3-2\lambda & 2\lambda & 3 & -2\lambda \\ 1-\lambda & \lambda & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbf{R}$

1) Vérifier que $A^2 = 0$

2) Montrer que si $\lambda = 0$ alors $\text{rang}(A) = 1$

3) Montrer que si $\lambda \neq 0$ alors $\text{rang}(A) = 2$

EXERCICE VIII :

Soit $X \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R})$ et $k \in \mathbf{N} \quad 1 \leq k \leq p$. On note $C_k(X)$ la sous-matrice obtenue en considérant les k premières colonnes de X .

1) Montrer que si $X \overset{l}{\sim} Y$ alors $C_k(X) \overset{l}{\sim} C_k(Y)$

2) Montrer que si Y est une matrice ligne-réduite échelonnée alors $C_k(Y)$ est aussi une matrice ligne-réduite échelonnée.

3) En déduire que si la matrice augmentée $(R | H)$ est la matrice ligne-réduite échelonnée de $(A | K)$ alors R est la matrice ligne-réduite échelonnée de A .

EXERCICE IX :

Soit A une matrice non nulle de format $n \times p$.

Montrer que $\text{rang}(A)=1$ si et seulement si A peut se mettre sous la forme d'un produit $A = BC$ où B et C sont deux matrices non nulles de format respectif $n \times 1$ et $1 \times p$.