

EXERCICE I :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ On considère les trois opérations élémentaires $L_2(4)$, $L_{32}(5)$ et L_{21} et soit E_1 ,

E_2 et E_3 les matrices élémentaires correspondantes.

1) Donner E_1 , E_2 et E_3

2) Calculer et comparer :

- a) $L_2(4)(A)$ et E_1A b) $L_{32}(5)(A)$ et E_2A c) $L_{21}(A)$ et E_3A
d) $L_2(4)L_{32}(5)(A)$ et E_1E_2A e) $L_{21}L_2(4)L_{32}(5)(A)$ et $E_3E_1E_2A$

EXERCICE II :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

- 1) a) Trouver une matrice élémentaire E_1 telle que $B = E_1A$. Calculer E_1^{-1}
b) Trouver une matrice élémentaire E_2 telle que $C = E_2B$. Calculer E_2^{-1}
c) En déduire une matrice P inversible $C = PA$. Calculer P^{-1}

2) Exprimer les lignes de C comme combinaisons linéaires des lignes de A

3) Vérifier que $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de A . En déduire l'inverse de B et de C .

EXERCICE III :

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice diagonale d'ordre n .

- 1) Montrer que si $\prod_{i=1}^n a_{ii} \neq 0$ alors A est inversible.
2) Donner, dans ce cas, son inverse A^{-1}
3) Ecrire A^{-1} comme produit de matrices élémentaires.

EXERCICE IV :

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R})$ et $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

1) a) Ecrire D comme produit de matrices élémentaires.

b) En déduire le terme général de DA .

2) Application numérique : calculer DA où $n=50$ et $p=100$ et $\forall i=1, \dots, 50$ $d_i=i$ et $\forall i=1, \dots, 50$ $\forall j=1, \dots, 100$ $a_{ij}=i+j-1$

PROBLEME : (Etude des p-matrices)

$\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, I_n est la matrice identité d'ordre n , $\mathbf{R}_c^n$ désigne l'ensemble des matrices colonnes à n lignes à coefficients réels. On note l_{ij} l'opération élémentaire de lignes qui échange (permuté) la ligne i et la ligne j d'une matrice. (i n'est pas nécessairement distinct de j). On note E_{ij} la matrice élémentaire correspondant à l_{ij} . ($E_{ij}=l_{ij}(I_n)$). (Rappelons que $l_{ij}(A)=E_{ij}A$).

On considère les matrices :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_c^4$$

On appelle t-matrice toute matrice obtenue à partir de I_n par application d'une seule opération élémentaire de lignes du type l_{ij} .

On appelle p-matrice toute matrice obtenue à partir de I_n par application (composition) d'un nombre fini d'opérations élémentaires de lignes du type l_{ij} .

On désigne par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des p-matrices carrées d'ordre n .

- 1) Donner $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$. Dresser la table de Pythagore de $\mathcal{P}_2$ pour la multiplication habituelle des matrices. Quelle est la structure de $\mathcal{P}_2$ pour cette multiplication ?
- 2)
 - a) Donner la suite d'opérations élémentaires de lignes transformant I_4 en J , I_4 en K et I_4 en L . Exprimer J comme produit d'un nombre fini de t-matrices.
 - b) Calculer JX , appliquer à X la suite d'opérations élémentaires de lignes transformant I_4 en J . Que peut-on en conclure ?
 - c) JK et KJ sont-elles des p-matrices ?
 - d) Calculer JL et LJ . Que conclure ? Comparer tJ et L .
- 3) Dans $\mathcal{P}_n$ on considère la multiplication habituelle des matrices.
 - a) Montrer que le produit de deux p-matrices est une p-matrice
 - b) Montrer qu'une p-matrice est inversible.
 - c) Montrer que $\mathcal{P}_n$, muni de la multiplication habituelle des matrices, est un groupe. Est-il commutatif ?
- 4)
 - a) Soit T une t-matrice. Montrer que ${}^tT = T$.
 - b) Montrer que la transposée d'une p-matrice est une p-matrice
 - c) Montrer que l'inverse d'une p-matrice est égale à sa transposée.
- 5) Soit $A \in \mathcal{P}_n$, $X = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_c^n$ et $Y = AX = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}_c^n$.
Montrer que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \exists j \in \{1, 2, \dots, n\}$ unique tel que $y_i = x_j$.
- 6) Soit $A \in \mathcal{P}_n$, $X = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_c^n$ et $Y = AX = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}_c^n$ et $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des coefficients de X . D'après la question précédente E est aussi l'ensemble des coefficients de Y . On dit qu'un coefficient x_i de X est invariant par A si $y_i = x_i$. Autrement dit si x_i se retrouve à la même ligne dans Y (que dans X). On note $\text{Inv}(A)$ le sous-ensemble de E des éléments invariants par A et on désigne par $\mathcal{E}_A$ son complémentaire dans E que l'on appelle ensemble d'efficacité de A . Une p-matrice dont l'ensemble d'efficacité est égal à E est dite complète.
 - a) Donner l'ensemble d'efficacité de J , K et de I_4 .
 - b) Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble d'efficacité d'une t-matrice ?
 - c) Donner une borne inférieure et une borne supérieure de l'ensemble d'efficacité d'une p-matrice qui n'est pas une t-matrice.
 - d) Montrer que deux p-matrices ayant des ensembles d'efficacité disjoints commutent.
- 7) Soit $A \in \mathcal{P}_n$. On appelle degré de A le plus petit entier naturel $k > 0$ tel que $A^k = I_n$.
 - a) Quel est le degré de I_n ? Quel est le degré d'une t-matrice ?
 - b) Quel est le degré de J ? Donner le sous-groupe engendré par J .
 - c) Soit $A \in \mathcal{P}_n$ de degré pair ($k=2r$), quel est l'inverse de A^r ?
 - d) Montrer qu'une p-matrice est symétrique si et seulement si son degré est 1 ou 2.