EXERCICE I :

1) On considère le polynôme en x $p(x)=(x-1)(x+2)$. Combien admet-il de racines réelles?

2) Soit A une matrice carrée et soit le polynôme en A $P(A)=(A-I)(A+2I)$

a) Montrer que $P(A)=A^2+A-2I$

b) Vérifier que pour chacune des matrices suivantes on a $P(A)=0$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbf{R}$$

c) Quelle conclusion peut-on en tirer?

d) Donner l'inverse de : $A = \begin{pmatrix} -2 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbf{R}$

EXERCICE II:

Soit A une matrice involutive.

1) Montrer que les deux matrices $\frac{1}{2}(I - A)$ et $\frac{1}{2}(I + A)$ sont idempotentes.

2) Montrer que $\left[\frac{1}{2}(I - A) \right] \left[\frac{1}{2}(I + A) \right] = 0$

EXERCICE III

On considère les quatre matrices : $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer quelles sont linéairement dépendantes. On écrira, pour cela, A_2 comme combinaison linéaire des autres.

2) Est-ce que A_1 dépend linéairement des autres ?

3) Montrer qu'une matrice nulle dépend linéairement de n'importe quel ensemble de matrices de même format.

EXERCICE IV

1) Donner deux matrices carrées A et B telles que : $AB=0$ et $BA \neq 0$.

Calculer $(A+B)(A-B)$ et A^2-B^2 et comparer.

Calculer $(A \pm B)^2$ et $A^2 \pm 2AB + B^2$ et comparer.

2) Soient A et B deux matrices carrées de même ordre n

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ est que A et B commutent.

3) Soient A et B deux matrices carrées de même ordre n

Montrer qu'une condition suffisante pour que $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ est que A et B commutent. Cette condition est-elle nécessaire?

4) Soient A et B deux matrices carrées de même ordre n telles que $AB=BA$

Montrer que : $(A + B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k A^{n-k} B^k \quad n \in \mathbf{N}^*$

Donner une expression analogue pour $(A-B)^n$.

Application numérique : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

b) En remarquant que $A = 2I_3 + J$ calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}^*$.

EXERCICE V :

Soit $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbf{R})$ $B=(b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbf{R})$ et $C=AB$

1) Montrer que si une ligne d'indice i de A est nulle il en est de même de la ligne de même indice de C

2) Montrer que si une colonne d'indice j de B est nulle il en est de même de la colonne de même indice de C

3) Montrer que si une colonne d'indice j de A s'écrit comme combinaison linéaire des $p-1$ colonnes restantes de A alors toutes les colonnes de C s'écrivent comme combinaison linéaires des $p-1$ colonnes restantes de A .

EXERCICE VI :

Soit A, B et P trois matrices carrées de même ordre n et soit $k \in \mathbf{N}^*$. On suppose que P est inversible et que $B = P^{-1}AP$.

1) Montrer que $B^k = P^{-1}A^kP$ et que $A^k = PB^kP^{-1}$

2) En déduire que $\alpha_k A^k + \alpha_{k-1} A^{k-1} + \dots + \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$ si et seulement si $\alpha_k B^k + \alpha_{k-1} B^{k-1} + \dots + \alpha_2 B^2 + \alpha_1 B + \alpha_0 I = 0$ où $\forall i = 0, 1, \dots, k$ $\alpha_i \in \mathbf{R}$

EXERCICE VII :

Soit $A=(a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n . On dit que A est triangulaire inférieure (respectivement triangulaire supérieure) si $\forall i < j$ $a_{ij}=0$ (respectivement $\forall i > j$ $a_{ij}=0$). On dit que A est triangulaire unipotente si A est triangulaire et si $\forall i$ $a_{ii} = 1$.

1) a) Montrer que la somme de deux matrices triangulaires inférieures (respectivement triangulaires supérieures) de même ordre est une matrice triangulaire inférieure (respectivement triangulaire supérieure).

b) La somme de deux matrices triangulaires unipotentes est-elle une matrice triangulaire unipotente?

2) a) Montrer que le produit de deux matrices triangulaires inférieures (respectivement triangulaires supérieures) de même ordre est une matrice triangulaire inférieure (respectivement triangulaire supérieure).

b) La matrice produit de deux matrices triangulaires unipotentes est-elle triangulaire unipotente?

EXERCICE VIII :

Soient $A, B,$ et C trois matrices carrées et $D=\text{diag}(A,B,C)$. Montrer que D est nilpotente si et seulement si $A, B,$ et C le sont.

EXERCICE IX:

Soit $U=(u_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n définie par : $\forall i=1,2, \dots, n$ et $\forall j=1,2, \dots, n$ $u_{ij}=1$ et soit $A=U-I_n$ où I_n est la matrice identité d'ordre n .

1) Calculer U^2 et en déduire A^2 .

2) Déterminer deux nombres réels λ et μ tels que la matrice $P=\lambda A+\mu I_n$ soit involutive ($P^2=I_n$).

EXERCICE X :

Soit $E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & -a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tel que } a \in \mathbf{R} \right\}$

1) Montrer que la multiplication habituelle des matrices est une loi de composition interne dans E .

2) Montrer que E , muni de la multiplication habituelle des matrices, est un groupe. Est-il

commutatif ?

3) Calculer M_a^n pour $n \in \mathbf{N}^*$.

EXERCICE XI :

Une matrice carrée d'ordre 1 $A=(a)$ sera identifiée au nombre réel a .

Etant donnés trois nombres réels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On considère les matrices :

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $U^t U, {}^t U U, M^2$ et $P=I+M^2$.

2) Vérifier que $P=U^t U$ et en déduire que $P^2=P$

3) Montrer que $PM=MP=0$, en déduire que pour $n \in \mathbf{N}^*$ $(-1)^n M^{2n}$ ne dépend pas de n . (on peut examiner $(P-M^2)^n$).

PROBLEME :

Soit $E = \left\{ A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -1/\lambda & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \text{ tq } \lambda \in \mathbf{R}^* \right\}$ et A_λ et A_μ deux éléments de E .

1) a) Montrer que A_λ et A_μ commutent si et seulement si $\lambda=\mu$

b) Montrer que $A_\lambda A_\mu + A_\mu A_\lambda = k_{\lambda,\mu} I$ où I est la matrice identité et $k_{\lambda,\mu}$ est un réel que l'on déterminera.

c) Montrer que $k_{\lambda,\mu} = 0$ si et seulement si $\lambda=\mu$

d) Que peut-on en déduire sur $A_{2\lambda}$? e) Calculer $(A_\lambda + A_\mu)^2$

2) a) Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que $(A_\lambda + A_\mu)^{2n} = (-1)^n \frac{(\lambda - \mu)^{2n}}{(\lambda\mu)^n} I$

b) Montrer que $(A_\lambda + A_{2\lambda})^{2n}$ ne dépend pas de λ

3) Rappelons qu'une matrice $A=(a_{ij}(x))$, dont les coefficients dépendent d'un paramètre x , admet une limite quand x tend vers l'infini, s'il existe une matrice $L=(l_{ij})$ telle que

$$\forall i \quad \forall j \quad a_{ij}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} l_{ij}$$

a) Montrer que la matrice $B = \sum_{p=1}^{p=n} (A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p}$ admet, quand n tend vers l'infini, une limite que l'on calculera.

b) Exprimer simplement la matrice $C = \sum_{p=1}^{p=n} (A_p + A_{p+1})^2$

c) Montrer que la matrice C admet, quand n tend vers l'infini, une limite que l'on calculera.

4) On décompose $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -1/\lambda & 0 \end{pmatrix} = J + K$

a) Montrer que $J^2 = -K^2 = I$

b) En déduire que $JK + KJ = 0$

5) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & -1 & -1/\lambda & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 \\ -1/\mu & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ En utilisant une partition adéquate :

a) Calculer D^2 b) En déduire D^n pour l'entier $n \geq 2$

c) On suppose n pair, montrer que D^n est inversible si et seulement si $\lambda \neq \mu$

d) Etudier l'inversibilité de D^n pour n impair.