

**EXERCICE I :**

Soit  $\mathbf{R}_3[x]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq 3$  muni de la base canonique  $\mathcal{B}=(e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3)$  avec  $e_i(x)=x^i \ i=0, 1, 2, 3$ . On considère la famille de vecteurs  $\mathcal{B}'=(f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_3)$  avec :

$f_0(x)=1 \ f_1(x)=x \ f_2(x)=-1+2x^2$  et  $f_3(x)=-3x+4x^3$  (les 4 premiers polynômes de Chebyshev)

- 1) Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbf{R}_3[x]$ .
- 2) Donner la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  ainsi que son inverse est  $P^{-1}$
- 3) On considère l'endomorphisme  $T$  de  $\mathbf{R}_3[x]$  défini par :  $\forall p \in \mathbf{R}_3[x] \ T(p)=p'$ 
  - a) Donner la matrice représentative de  $T$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .
  - b) En déduire la matrice représentative de  $T$  relativement à la base  $\mathcal{B}'$ .

**EXERCICE II : (D'après examen)**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  la matrice, dans la base canonique  $\mathcal{B}$ , d'un endomorphisme  $f$  de  $\mathbf{R}^2$ .

Soit  $\mathcal{B}' = \{e'_1=(1,1) ; e'_2=(2,1)\}$  une autre base de  $\mathbf{R}^2$ .

- 1) Donner la matrice de passage  $P$  ainsi que  $P^{-1}$ . En déduire la matrice  $B$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
- 2) Calculer  $B^n$  pour  $n \in \mathbf{N}^*$  et en déduire  $A^n$  pour  $n \in \mathbf{N}^*$

Application :

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels non nuls et  $E_{\alpha,\beta}$  l'espace vectoriel (de dimension 2) des suites  $(u_n)$  numériques réelles vérifiant, pour  $n \geq 1$ , la relation :

$$(*) u_{n+1} = \alpha u_n + \beta u_{n-1} \quad \text{avec } u_1=a \text{ et } u_0=b \text{ donnés.}$$

- 1) Vérifier qu'on peut écrire la relation (\*) sous la forme :

$$T_{n+1} = A.T_n \quad \text{avec} \quad T_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{En déduire que : } T_{n+1} = A^n.T_1$$

- 2) Ecrire sous cette forme la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$  avec  $u_1=1$  et  $u_0=0$ .
- 3) En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE III :**

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels munis respectivement des bases :

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$  et  $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$  et soit  $T$  un élément de  $\mathcal{L}(E, F)$  dont la matrice relativement aux

bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  est :  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Déterminer une nouvelle base de  $F$  pour laquelle la matrice  $A'$  associée à  $T$  est ligne réduite échelonnée.
- 2) En déduire la matrice de changement de base  $P$  telle que  $A'=P.A$  (faire un diagramme)

**EXERCICE IV : (D'après examen)**

Soit  $E$  un espace vectoriel réel et  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $u^2 - 5u + 6Id = 0$  où  $u^2 = u \circ u$  ;  $Id$  est l'application identique de  $E$  et  $0$  l'application identiquement nulle de  $E$  dans  $E$ . On considère les deux endomorphismes  $p$  et  $q$  de  $E$  définis par :  $p = u - 2Id$  et  $q = Id - p$ .

- 1) Montrer que  $p$  et  $q$  sont des projecteurs ( $p^2=p$  et  $q^2=q$ )
- 2) Calculer  $poq$  ;  $qop$  et  $p+q$
- 3) Soit  $E = \mathbf{R}^3$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3)$  et soit  $u$  l'endomorphisme de  $E$  dont la

matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

a) Montrer que  $p$  et  $q$ , définis comme précédemment, sont des projecteurs.

b) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de  $p$  et  $q$

c) On considère les trois vecteurs  $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$  ;  $f_2 = -e_1 + e_2$  et  $f_3 = -e_1 + e_3$ . Montrer que  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $E$  et donner la matrice  $B$  de  $u$  dans cette base  $\mathcal{B}'$ . Calculer  $B^n$  et en déduire  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

d) Donner la matrice de  $p$  et de  $q$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

#### EXERCICE V : (D'après examen)

Soit  $\mathbf{R}_3[X]$  l'espace vectoriels des polynômes de degré  $\leq 3$  muni de la base canonique

$\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$  où  $\forall x \in \mathbf{R} \quad e_i(x) = x^i \quad i=0,1,2,3$  et soit  $a_0, a_1, a_2$  et  $a_3$  4 réels distincts

On considère les quatres polynômes :

$$P_0(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)} \quad P_1(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$

$$P_2(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)} \quad P_3(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

1) Vérifier que  $P_i(a_j) = 0$  si  $i \neq j$  et  $P_i(a_j) = 1$  si  $i = j$

2) Montrer que la famille  $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2, P_3)$  est une base de  $\mathbf{R}_3[X]$

3) Donner la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$

4) En déduire que la matrice  $Q = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & a_0^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}$  est inversible

5) Donner les composantes d'un polynôme quelconque  $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$  de  $\mathbf{R}_3[X]$  dans la base  $\mathcal{B}'$

#### EXERCICE VI :

Soit  $\mathbf{R}_3[x]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq 3$  muni de la base canonique  $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$  avec  $e_i(x) = x^i \quad i=0, 1, 2, 3$ . On considère la famille de vecteurs  $\mathcal{B}' = (f_0, f_1, f_2, f_3)$  avec :

$f_0(x) = 1 \quad f_1(x) = x \quad f_2(x) = -1 + 2x^2$  et  $f_3(x) = -3x + 4x^3$  (les 4 premiers polynômes de Chebyshev)

1) Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbf{R}_3[x]$ .

2) Vérifier que la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  et son inverse est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

3) On considère l'endomorphisme  $T$  de  $\mathbf{R}_3[x]$  défini par :  $\forall p \in \mathbf{R}_3[x] \quad T(p) = p'$

a) Donner la matrice représentative de  $T$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

b) En déduire la matrice représentative de  $T$  relativement à la base  $\mathcal{B}'$ .