Travaux Dirigés N°13

Représentations matricielles des applications linéaires

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Soit $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (f_1,f_2)$ une base de $\mathbf{R}^2$.

On considère les applications linéaires : $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ et $U : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ définies par :

$T(e_1)=e_1$ $\quad T(e_2)=e_1+ e_2$ $\quad T(e_3)=e_1+e_2+e_3$

$U(e_1)=f_1-2f_2$ $\quad U(e_2)=2f_1-f_2$ $\quad U(e_3)=f_1+f_2$

1) Donner les matrices de T et U. En déduire la matrice de $S=U\text{o}T$

2) Expliciter S à partir de T et U et calculer directement sa matrice

EXERCICE II : (D'après examen)

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}_c^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. Soit T l'endomorphisme de $\mathbf{R}_c^3$ défini par : $T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{pmatrix}$

1) Donner la matrice A de T relativement à la base $\mathcal{B}$.

2) On considère les trois vecteurs : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}_c^3$ et donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ainsi que son inverse P^{-1}.

3) Déduire de ce qui précède la matrice B de T relativement à la base $\mathcal{B}'$.

4) Pour $k\in\mathbf{N^*}$, calculer B^k et en déduire que $T^k= a_kT+b_k\, Id$ où a_k et b_k sont deux réels que l'on déterminera. ($T^k=T\text{o}T^{k-1}$, $T^0 = Id$ et Id est l'identité dans $\mathbf{R}_c^3$: $\forall x\in \mathbf{R}_c^3 \;\; Id(x)=x$)

EXERCICE III : (D'après examen)

Soit $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n muni de sa base canonique $\mathcal{B}=\{e_i\}$ où $\forall x\in\mathbf{R} \;\; e_i(x)=x^i \;\; i=0, ..., n$. Soit φ l'application de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}_n[X]$ définie par : $\varphi : p \to q=\varphi(p)$ où $\forall x\in\mathbf{R} \;\; q(x)=p(x)-xp'(x)$ où $p'(x)$ est la dérivée de $p(x)$.

1) Montrer que φ est une application linéaire.

2) Ecrire la matrice M de φ dans la base canonique.

3) Exprimer $\varphi^2(p)=\varphi\text{o}\varphi(p)$ en fonction de p et de ses dérivées.

4) Ecrire la matrice de φ^2 dans la base canonique.

EXERCICE IV : (D'après examen)

Soit $\mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels de degré ≤ 3 muni de la base canonique $\mathcal{B}=(e_0,e_1,e_2,e_3)$ où $\forall\, x \in \mathbf{R} \;\; e_i(x) = x^i\, i = 0,1,2,3$

Partie A

On considère l'application $T : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_3[X]$ qui à chaque polynôme p de $\mathbf{R}_3[X]$ associe le polynôme $q=T(p)$ défini par :

$\forall x\in\mathbf{R} \qquad q(x)=T(p)(x)=xp'(x)-p(x) \qquad$ où p' désigne la dérivée de p.

1) Montrer que T est une application linéaire

2) Donner la matrice A de T relativement à la base canonique $\mathcal{B}$.

3) Donner une base de $\text{Im}(T)$ et de $\text{Ker}(T)$.

4) Soit $U=T^2=T\text{o}T$. Donner l'expression de $U(p)(x)$ et déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Partie B

On considère la famille $\mathcal{B}'=(p_0,p_1,p_2,p_3)$ de vecteurs de $\mathbf{R}_3[X]$ définis par :

$p_0(x)=1+x+x^2+x^3$ $\quad$ $p_1(x)=1+x+x^2-x^3$ $\quad$ $p_2(x)=1+x-x^2+x^3$ $\quad$ $p_3(x)=1-x+x^2+x^3$

1) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$

2) Donner la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et en déduire P^{-1}

3) Donner la matrice de T et celle de U dans la base $\mathcal{B}'$.