Travaux Dirigés N°12
Applications linéaires

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Dans toute la suite E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$ et T une application de E dans F.
Dire pourquoi les applications T suivantes ne sont pas des applications linéaires :

a) $E=F=\mathbf{R}^2$ $\quad T((x,y))=(x^2,y)$ $\qquad$ **b)** $E=\mathbf{R}_c^2$ $F=\mathbf{R}$ $\quad T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=x+y+1$

c) $E=F=\mathbf{R}$ $\quad T(x)=e^x$ $\qquad$ **d)** $E=F=\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$ $\quad T(f)=|f|$

e) $E=F=\mathbf{R}_2[x]$ $\quad T(p)(x)=p''(x)p(x)$

EXERCICE II :

Soient E et F deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Dire lesquelles parmi les applications suivantes, sont des applications linéaires de E dans F.

a) $E = F = \mathbf{R}^2$ $\quad T(x,y) = (x,y+1)$
b) $E = \mathbf{R}^2$, $F = \mathbf{R}^3$ $\quad T(x,y) = (x,y+x,2x)$
c) $E = \mathbf{R}^3$, $F = \mathbf{R}$ $\quad T(x,y,z) = x+yz$
d) $E = F = \mathbf{R}_2[\mathrm{x}]$ $\quad T(p)(x) = p(x+1)$
e) $E = F = \mathbf{R}^{\mathrm{I}}$ $\quad T(f)(x) = xf(x)$
f) $E = \mathbf{R}^4$, $F = \mathbf{R}^3$ $\quad T(x,y,z,t) = (y+x,y\text{-}z,z+x)$

EXERCICE III :

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\{e_1, e_2\}$

1) On considère l'endomorphisme T de E défini par : $T(e_1)=2e_1+4e_2$ $\qquad T(e_2)=-e_1+2e_2$

a) Calculer $\quad T(3,4)=T(3\ e_1+4e_2)$ $\qquad T(1,-1)=T(e_1-e_2)$

b) Soit $u=(x,y)=xe_1+ye_2\in E$. Donner l'expression générale de T $(T(x,y)=?)$

2) Soit T l'endomorphisme de E défini par son expression générale $T(x,y)=T(xe_1+ye_2)=(2x-3y,x)$

Calculer $T(e_1)$ et $T(e_2)$

EXERCICE IV :

On considère l'application définie par : $\begin{array}{rl} T:\mathbf{R}_3[x] \longrightarrow & \mathbf{R} \\ p \longrightarrow & T(p)=p(0) \end{array}$

a) Montrer que T est une forme linéaire

b) Quel est son noyau? son image? En déduire la dimension du noyau.

EXERCICE V:

Soient E et F deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels et T une application linéaire de E dans F. Montrer que :

a) L'image par T d'un sous-espace vectoriel de E est sous-espace vectoriel de F

b) L'image réciproque par T d'un sous-espace vectoriel de F est sous-espace vectoriel de E

EXERCICE VI :

On considère l'espace vectoriel réel $E=\mathbf{R}^2$

1) Soit T l'application de E dans E définie par : $\begin{array}{rcl} T: \quad E & \longrightarrow & E \\ u=(x,y) & \longrightarrow & T(u)=(x,0) \end{array}$

a) Calculer $T(1,1)$. Montrer que T est une application linéaire. Quelle appellation suggériez-vous pour T ?

2) Soit $\lambda\in\mathbf{R}$ et U l'application de E dans E définie par : $\begin{array}{rcl} U: \quad E & \longrightarrow & E \\ u=(x,y) & \longrightarrow & U(u)=(\lambda x,\lambda y) \end{array}$

a) Calculer $U(1,1)$. Montrer que U est une application linéaire. Quelle appellation suggériez-vous pour U ?

EXERCICE VII : (D'après examen)

Soit $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n muni de sa base canonique $\mathcal{B}=\{e_i\}$ où $\forall x\in\mathbf{R}$ $e_i(x)=x^i$ $i=0, ..., n$. Soit φ l'application de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}_n[X]$ définie par : $\varphi : p \to q=\varphi(p)$ où $\forall x\in\mathbf{R}$ $q(x)=p(x)-xp'(x)$ où $p'(x)$ est la dérivée de $p(x)$.

1) Montrer que φ est une application linéaire.

2) Exprimer $\varphi^2(p)=\varphi o\varphi(p)$ en fonction de p et de ses dérivées.

EXERCICE VIII:

Soient E et F deux **R**-espaces vectoriels et T une application linéaire de E dans F.

1) Soit $\{u_1, u_2,..., u_n\}$ une famille libre de E. Montrer que si T est injective alors $\{T(u_1),T(u_2),...,T(u_n)\}$ est une famille libre de F.

2) Soit $\{e_1, e_2,..., e_n\}$ une base de E. Montrer que :

a) T est injective si et seulement si $\{T(e_1),T(e_2),...,T(e_n)\}$ est une famille libre de F.

b) T est surjective si et seulement si $\{T(e_1),T(e_2),...,T(e_n)\}$ est une famille génératrice de F.

3) En déduire le théorème (dit théorème de l'alternative)

Soient E et F deux **R**-espaces vectoriels de même dimension finie et T une application linéaire de E dans F. Alors : T injective $\Leftrightarrow$ T surjective $\Leftrightarrow$ T bijective

EXERCICE IX :

Soit T l'application de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^4$ définie par : $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1-x_3, x_2-x_4)$

1) Montrer que T est une application linéaire

2) Quelle est la dimension de Ker(T)? Proposer une base pour Ker(T).

EXERCICE X :

Soit T un endomorphisme de E et $T^2 = T \text{ o } T$

1) Montrer que $\text{Ker}(T)\subset\text{Ker}(T^2)$ et que $\text{Im}(T^2)\subset\text{Im}(T)$

2) Soit $E=\mathbf{R}^3$ et T l'endomorphisme défini par : $T(x_1, x_2, x_3)=(0, x_1, x_1+x_2)$

a) Déterminer une base de chacun des sous-espaces : Ker(T), Im(T), Ker(T^2) et Im(T^2)

b) Vérifier que $\dim \mathbf{R}^3=\dim\text{Ker}(T^2)+\dim\text{Im}(T^2)$

c) Peut-on dire pour autant que $\mathbf{R}^3$ est somme directe de Ker(T^2) et de Im(T^2)?

EXERCICE XI:

Soient E et F deux **R**-espaces vectoriels de dimension n et m. Soit T une application linéaire de E dans F.

1) Montrer que $\text{rang}(T)\leq n$ et $\text{rang}(T)\leq m$

2) Soit U un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim T(U)\leq\dim U$.

2) Soit S une application linéaire de F dans un **R**-espace vectoriel G. Montrer que :

$\text{rang}(SoT)\leq\text{rang}(S)$ et $\text{rang}(SoT)\leq\text{rang}(T)$

EXERCICE XII :

Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires d'un **R**-espace vectoriel E. On considère l'application :

$$\begin{array}{llll} p : & E=F+G & \to & E \\ & x=y+z & \to & p(x)=y \end{array}$$

1) Montrer que p est un endomorphisme de E et que $p^2(=pop)=p$

2) Déterminer Ker(p) et Im(p). Quelle appellation suggériez-vous pour p?

EXERCICE XIII :

Soit E=F=$\mathbf{R}_c^2$ et G=$\mathbf{R}_c^3$. On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

et les applications $\begin{array}{rcl} R : E & \longrightarrow & F \\ u & \longrightarrow & R(u) = Au \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} S : F & \longrightarrow & G \\ u & \longrightarrow & S(u) = Bu \end{array}$

1) Montrer que les applications R et S sont des applications linéaires.

2) Donner les expressions analytiques de R et S. En déduire l'expression analytique de T=SoR

3) Vérifier que $\forall u \in E \quad T(u)=(B.A)u$

EXERCICE XIV :(D'après examen)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n>0 et u un endomorphisme de E tel que $u^2=-Id$. (Id est l'application identique et $u^2=u\circ u$).

a) Montrer que u est inversible.

b) Soit x un vecteur non nul de E, montrer que x et $u(x)$ sont linéairement indépendants.

c) Montrer que l'existence d'un endomorphisme u de E tel que $u^2=-Id$ ne peut avoir lieu que si la dimension n de E est paire.

EXERCICE XV : (D'après examen)

Soit E un **R**-espace vectoriel. Un endomorphisme p de E est un <u>projecteur</u> si $p^2=p$.

Un endomorphisme u de E est <u>involutif</u> si $u^2=Id$. (où Id est l'identité dans E)

1) Soit u et p deux endomorphismes de E tels que $p=½(Id+u)$. Montrer que : p est un projecteur si et seulement si u est involutif.

2) On suppose que p est un projecteur et on pose $q=Id-p$. Montrer que

a) q est un projecteur.

b) Imq=Ker$p$.

c) Imp=Ker$q$.