Travaux Dirigés N°11

Changement et construction de bases

EL METHNI M.

EXERCICE I :

Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\4&4&0&4\\0&1&1&1\\0&2&2&2\end{pmatrix}$

Donner une base du noyau de A et une base de l'espace colonne de A. Retrouver la relation qui existe entre les dimensions de ces deux sous-espaces et le nombre de colonnes de A.

EXERCICE II :

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ muni de deux bases : la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ avec $f_1=\frac{\sqrt{3}}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2$ et $f_2=-\frac{1}{2}e_1+\frac{\sqrt{3}}{2}e_2$

1) Représenter dans le plan ces deux bases et décrire comment on passe de l'une à l'autre

2) Donner la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. En déduire la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

3) Posons $E_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $E_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ les représentants de e_1 et e_2 dans $\mathbf{R}_c^2$. Calculer $P.E_1$ et $P.E_2$.

Quelle relation avec f_1 et f_2?

4) Soit $x=x_1e_1+x_2e_2=y_1f_1+y_2f_2$. Exprimer x_1 et x_2 en fonction de y_1 et y_2 et réciproquement.

<u>*Application numérique*</u> : Donner les coordonnées de $x=e_1+e_2$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Donner les coordonnées de $y=f_1+f_2$ dans la base $\mathcal{B}$.

EXERCICE III :

Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions du système :

$$\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3+x_4=0\\-x_1+3x_2-x_3+4x_4=0\end{cases}$$

EXERCICE IV :

Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&3\\1&2&3&1&2\\1&1&1&2&3\\1&1&1&1&3\end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix}3&-1&-1&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$ $Q=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&1&0\\1&1&2&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

1) Vérifier que $PA = R$ est une matrice ligne réduite échelonnée et $Q = P^{-1}$.

2) On considère la famille $S=\{(1\ 1\ 1\ 1); (1\ 2\ 1\ 1); (1\ 3\ 1\ 1); (1\ 1\ 2\ 1); (3\ 2\ 3\ 3)\}$ de vecteurs de $\mathbf{R}^4$

a) Montrer que S est une famille liée et donner la relation linéaire entre les colonnes de A. Quel est le rang de S ?

b) Extraire de S une famille libre et compléter la en une base de $\mathbf{R}^4$

3) Montrer que les lignes non nulles de R constituent une base de l'espace vectoriel engendré par les lignes de A. Généraliser.

4) Déduire la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes de A et comparer avec la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A. Généraliser

EXERCICE V :

Soit $\mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 muni de sa base canonique $B=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$.

On considère la famille de quatre polynômes p_1, p_2, p_3 et p_4 définis par :

$p_1(x)=1$ $p_2(x)=1+x+x^2$ $p_3(x)=2+x+x^2$ $p_4(x)=x^3$

1) Extraire de cette famille une famille libre

2) Compléter cette famille en une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

EXERCICE VI :

On rappelle que $\mathbf{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et que pour tout entier naturel n, $\mathbf{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. La base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ est $\mathcal{B}=(e_0, e_1, e_2,\ldots, e_n)$ où $\forall x\in\mathbf{R}\quad e_i(x)=x^i\quad i=0, ..., n$.

A tout polynôme $p(x)$ on associe le polynôme $q(x)=x^2p'(x)-3xp(x)$ où $p'(x)$ est la dérivée de $p(x)$.

1) Calculer les composantes dans la base canonique de $q(x)$ en fonction de celles de p dans cette même base.

2) Soit $\mathcal{B}'=(f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $\forall x\in\mathbf{R}\quad f_0(x)=x$; $f_1(x)=x+1$; $f_2(x)=x(x-1)$; $f_3(x)= x(x-1)(x+1)$

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$

b) Exprimer les f_i en fonction des e_i et les e_i en fonction des f_i

c) Donner les composantes du polynôme $p(x)=1+x+x^2+x^3$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les composantes du polynôme $q(x)$ associé au polynôme $p(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

EXERCICE VII :

Soit $\mathbf{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 muni de la base canonique $\mathcal{B}=(e_0\ e_1\ e_2\ e_3)$ avec $e_i(x) = x^i$ $i = 0, 1, 2, 3$. On considère la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (f_0\ f_1\ f_2\ f_3)$ avec :

$f_0(x)=1\quad f_1(x) = x\quad f_2(x)=-1+2x^2$ et $f_3(x)=-3x+4x^3$ (les 4 premiers polynômes de Chebyshev)

1) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}_3[x]$.

2) Soit $p\in\mathbf{R}_3[x]$ avec $p(x)=1+3x+2x^2$, donner les coordonnées de p dans la base $\mathcal{B}'$.