

Soit I un ensemble fini et x une application de I dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ qui à chaque élément i de I fait correspondre un réel (ou un complexe) x_i . I est appelé famille d'indices, x variable indexée ou indexée par i et i est l'indice. De façon générale les éléments de I sont des entiers naturels successifs $I=\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ou $I=\{5, 6, 7, \dots, n\}$ ou encore $I=\{p, p+1, p+2, \dots, n\}$. Dans toute la suite on prendra $I=\{1, 2, 3, \dots, n\}$, $J=\{1, 2, 3, \dots, p\}$ et $(x_i)_{i \in I}$ (ou $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$) et $(y_j)_{j \in J}$ (ou $(y_j)_{1 \leq j \leq p}$) sont deux familles de nombres réels (ou complexes). λ et μ sont deux réels (ou complexes) fixés.

Définition : On définit $\sigma_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i = \sum_{i \in I} x_i$ par : $\sigma_0=0$ et $\sigma_{k+1}=\sigma_k+x_{k+1}$ pour $k \in [[0, n-1]]$.

De même on définit $\pi_n = \prod_{i=1}^{i=n} x_i = \prod_{1 \leq i \leq n} x_i = \prod_{i \in I} x_i$ par : $\pi_0=1$ et $\pi_{k+1}=\pi_k \times x_{k+1}$ pour $k \in [[0, n-1]]$.

Partie I :

1) Justifier que :

a) $\sigma_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ b) $\sigma_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{k=1}^{k=n} x_k = \sum_{p=1}^{p=n} x_p$

2) Calculer : $\sum_{i=1}^{i=5} x_i$ pour $x_i = i$ $\sum_{k=1}^{k=n} x_k$ pour $x_k = 3$ $\sum_{p=3}^{p=11} x_p$ pour $x_p = p^2$

3) Justifier que : $\sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{i=0}^{i=n-1} x_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} x_{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{n-i}$

4) A-t-on $\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \sum_{i=1}^n y_i$? A-t-on $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}$?

5) Justifier que :

a) $\sum_{i=1}^{i=n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i + \sum_{i=1}^{i=n} y_i$ b) $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^{i=n} x_i$

6) Sachant que : $\sum_{i=1}^{i=n} x_i = X$ et $\sum_{i=1}^{i=n} y_i = Y$ calculer

$\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \lambda)$ $\sum_{i=1}^{i=n} (5x_i + 3y_i)$ $\sum_{i=1}^{i=n} (\lambda(x_i - 2) + \mu(y_i + \mu))$

7) Compléter : a) $\sum_{i=0}^{i=n} (x^{n-i} y^i) = x^n + y^n + \sum_{?}^{?}$ b) $\sum_{i=0}^{i=n} (x^{n-i} y^i) = \sum_{i=0}^{i=n-5} x^? y^? + \sum_{?}^{?}$

8) On pose : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i = m$ (comment désigne-t-on ce nombre ?) Calculer $\sum_{i=1}^{i=n} \left[x_i - \sum_{j=1}^{j=n} \frac{x_j}{n} \right]$

Connaissez-vous cette propriété ? Énoncez la en une phrase simple.

9) On considère une « liste double » $(x_i ; p_i)_{1 \leq i \leq k}$ où x_i sont les notes obtenues par un étudiant à la matière i et y_i sont les coefficients de cette matière i . On pose : $\sum_{i=1}^{i=k} p_i = P$ et $m = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{i=k} p_i x_i$

Que vaut $\sum_{i=1}^{i=k} p_i (x_i - m)$? Connaissez-vous cette propriété ? Énoncez la en une phrase simple.

10) On pose : $\sigma^2 = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{i=k} p_i (x_i - m)^2$ comment désigne-t-on ce nombre ? Montrer que

$$\sigma^2 = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{i=k} p_i x_i^2 - m^2 \text{ Connaissez-vous ce théorème ?}$$

11) On considère une « liste double » $(x_i ; y_i)_{1 \leq i \leq k}$ où x_i sont les notes obtenues par un étudiant X à la matière i et y_i sont les notes obtenues par un étudiant Y à la même matière i . On pose :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i = m_x \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} y_i = m_y \text{ et } \text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - m_x)(y_i - m_y) \text{ comment désigne-t-on ce}$$

nombre ? Montrer que $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i - m_x m_y$ Connaissez-vous ce théorème ?

Partie II :

1) Justifier que :

$$\text{a) } \pi_n = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n. \quad \text{b) } \pi_n = \prod_{i=1}^{i=n} x_i = \prod_{k=1}^{k=n} x_k = \prod_{p=1}^{p=n} x_p$$

$$\text{2) Calculer : } \prod_{i=1}^n x_i \text{ pour } x_i = i \quad \prod_{k=1}^{k=n} x_k \text{ pour } x_k = 3 \quad \prod_{p=3}^{p=11} x_p \text{ pour } x_p = p^2$$

$$\text{3) Justifier que : } \prod_{i=1}^{i=n} x_i = \prod_{i=0}^{i=n-1} x_{i+1} = \prod_{i=2}^{n+1} x_{i-1} = \prod_{i=0}^{n-1} x_{n-i}$$

4) A-t-on :

$$\text{a) } \prod_{i=1}^{i=n} x_i y_i = \prod_{i=1}^{i=n} x_i \prod_{i=1}^{i=n} y_i ? \quad \text{b) } \prod_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x_i} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{i=n} x_i} ?$$

$$\text{c) } \prod_{i=1}^{i=n} (x_i + y_i) = \prod_{i=1}^{i=n} x_i + \prod_{i=1}^{i=n} y_i \quad \text{d) } \prod_{i=1}^{i=n} (x_i)^p = \left(\prod_{i=1}^{i=n} x_i \right)^p$$

5) Compléter :

$$\text{a) } \prod_{i=1}^{i=n} \lambda x_i = \lambda^n \prod_{i=1}^{i=n} x_i \quad \text{b) } \prod_{i=1}^{i=n} (x_i - x) \prod_{i=1}^{i=n} (-x_i - x) = ? \prod_{i=1}^{i=n} (? - ?)$$

6) Montrer que : $\prod_{i=1}^{i=2n} i = \prod_{i=1}^{i=n} (2i-1) \prod_{i=1}^{i=n} 2i$ Ecrire cette égalité en termes de factoriel.

Partie III :

Soient $I = \{1, 2, \dots, n\}$ et $J = \{1, 2, \dots, p\}$ deux familles d'indices on note $(x_{ij})_{i \in I, j \in J}$ (ou $(x_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$) une variable indexée conjointement par I et J . On représente les x_{ij} par un « tableau » à n lignes (indexées par I) et à p colonnes (indexées par J).

1) Dresser le tableau $X = (x_{ij})_{i \in I, j \in J}$ dans les cas suivants:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } I = \{1, 2, 3\} \text{ et } J = \{1, 2, 3, 4\} \text{ et } x_{ij} = 2i-j & \text{b) } I = \{1, 2, 3\} = J \text{ et } x_{ij} = 1/(i+j-1) \\ \text{c) } I = \{1, 2, 3, 4\} = J \text{ et } x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & \text{b) } I = \{1, 2, 3, 4\} = J \text{ et } x_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{si } i > j \\ c & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

2) Soit $X = (x_{ij})_{i \in I, j \in J}$ un tableau « carré » $I = J = \{1, 2, \dots, n\}$. Matérialiser sur ce tableau les éléments

$$\text{suivants : } x_{ii} \ i \in I; \ x_{3j} \ j \in J; \ x_{ii} \ i > j; \ x_{n-i+1, i} \ i \in I; \sum_{i=1}^{i=n} x_{ii} \quad \sum_{i \in I} x_{i3} \quad \prod_{j=1}^n x_{2j} \quad \prod_{i=1}^n x_{n-i+1, i}$$

3) Quelle signification donneriez-vous à $\sum_{i=1, j=1}^{i=n, j=p} x_{ij}$?

$$\text{4) A-t-on } \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n x_{ij} \right) ?$$

5) Dans le cas où $I=J$ caractériser (sur le tableau) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij}$

6) Soient $I=\{1, 2, \dots, n\}$ et $J=\{1, 2, \dots, p\}$ deux familles d'indices. On considère deux tableaux $X=(x_{ij})_{i \in I, j \in J}$ et $Y=(y_{ij})_{i \in I, j \in J}$. La somme de X et Y est un tableau $Z=X \oplus Y=(z_{ij})_{i \in I, j \in J}$ où $\forall i \in I$ et $\forall j \in J$ $z_{ij}=x_{ij}+y_{ij}$.

a) Montrer que : $X \oplus Y=Y \oplus X$ (l'addition est commutative)

b) Montrer que : $X \oplus (Y \oplus Z)=(X \oplus Y) \oplus Z$ (l'addition est associative)

c) Existe-t-il un tableau T tel que : $X \oplus T=T \oplus X=X$? (existence d'un élément neutre). Quelle notation suggériez-vous pour T ?

d) Existe-t-il un tableau U tel que : $X \oplus U=U \oplus X=T$? (existence d'un opposé) (T étant le tableau de la question précédente). Quelle notation suggériez-vous pour U ?

7) Soient $I=\{1, 2, \dots, n\}$ et $J=\{1, 2, \dots, p\}$ deux familles d'indices. On considère deux tableaux $X=(x_{ij})_{i \in I, j \in J}$ et $Y=(y_{ij})_{i \in I, j \in J}$. Le transposé de X est un tableau $Z={}^tX=(z_{ij})_{i \in I, j \in J}$ où $\forall i \in I$ et $\forall j \in J$ $z_{ij}=x_{ji}$.

a) Montrer que : ${}^t(X \oplus Y)={}^tX \oplus {}^tY$

b) On suppose $n=p$. Que peut-on dire de X si ${}^tX=X$? Que peut-on dire de X si ${}^tX=-X$? ($-X$ au sens de 6-d)

8) Soient $I=\{1, 2, \dots, n\}=J$. On considère deux tableaux « carrés » $X=(x_{ij})_{i \in I, j \in I}$ et $Y=(y_{ij})_{i \in I, j \in I}$. La trace de X est le nombre $\text{tr}(X)=\sum_{i=1}^n x_{ii}$

a) Montrer que : $\text{tr}(X \oplus Y)=\text{tr}X+\text{tr}Y$

b) Montrer que : $\text{tr}({}^tX)=\text{tr}(X)$

Partie IV :

Soient $I=\{1, 2, \dots, n\}$ et $J=\{1, 2, \dots, p\}$ deux familles d'indices. On considère le tableau donnant les notes $(x_{ij})_{i \in I, j \in J}$ de l'étudiant i à la matière j .

1) Que représente $\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p x_{i_0 j}$ i_0 fixé ?

2) Que représente $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i j_0}$ j_0 fixé ?

3) Donner trois formules permettant de calculer la moyenne de toutes les notes.

4) On considère la liste $(c_j)_{j \in J}$ où chaque c_j est le coefficient de la matière j .

a) Donner une formule permettant de calculer la moyenne pondérée de l'étudiant i_0 .

b) Présenter les résultats sous la forme : (notes)(coefficients)=(moyennes des étudiants)

$$\begin{pmatrix} x_{11} & & & & x_{1p} \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & x_{ij} & \cdots & \vdots \\ & & & \vdots & & \\ x_{n1} & & & & & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_i \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

c) En déduire la moyenne pondérée de tous les étudiants.