I. Généralités sur les matrices

I-1. Définitions et premières propriétés

Définition 1 : Etant donné un couple d'entiers naturels $(n,p)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$, on appelle matrice à coefficients réels la donnée d'une suite finie double de nombres réels (a_{ij}) $i=1,\ldots,n$ $j=1,\ldots,p$. On présente une telle matrice sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}$$

a_{ij} est le terme général de la matrice, i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne. les nombres a_{ij} sont les éléments (ou termes ou coefficients) de la matrice. Une matrice à n lignes et p colonnes et de terme général a_{ij} est dite de format $n\times p$ et est notée $A=(a_{ij})$ $i=1,\ldots, n$ $j=1,\ldots, p$. Ou encore $A=(a_{ij})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur n et p.
On note $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de format $n\times p$ à coefficients réels.

Cas particuliers :

- **(a)** Si $p=1$ et $n>1$: On dit que A est une matrice colonne. Une matrice colonne est dite colonne nulle si tous ses coefficients sont nuls. Elle est dite non nulle dans le cas contraire. Une matrice colonne est souvent appelée vecteur colonne.
  On note $\mathbf{R}_c^{\,n}$ l'ensemble des matrices colonnes à n lignes à coefficients réels.
  On appelle matrices colonnes canoniques (ou vecteurs colonnes canoniques) les matrices colonnes e_i dont tous les termes sont nuls sauf le terme situé à la i$^{\text{ème}}$ ligne, et ce dernier vaut 1
- **(b)** Si $n=1$ et $p>1$: On dit que A est une matrice ligne. Une matrice ligne est dite ligne nulle si tous ses coefficients sont nuls. Elle est dite non nulle dans le cas contraire. . Une matrice ligne est souvent appelée vecteur ligne.
  On note $\mathbf{R}_l^{\,p}$ l'ensemble des matrices ligne à p colonnes à coefficients réels.
  On appelle matrices lignes canoniques (ou vecteurs ligne canoniques) les matrices lignes f_j dont tous les termes sont nuls sauf le terme situé à la j$^{\text{ème}}$ colonne, et ce dernier vaut 1
- **(c)** Si $n=p=1$: La matrice $A=(a_{11})$ est identifiée à a_{11}
- **(d)** Si $\forall i=1,\ldots, n$ $\forall j=1,\ldots, p$ $a_{ij} = 0$: On dit que A est la matrice nulle. On la note $0_{n\times p}$ (ou 0 et on dit zéro)
- **(e)** Si $n=p$: On dit que A est une matrice carrée. Au lieu de dire de format $n\times p$, on dira d'ordre n.
  On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- **(f)** Si $n=p$ et $\forall i \neq j$ $a_{ij} = 0$: On dit que A est une matrice diagonale. On note $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22},\ldots, a_{nn})$.
- **(g)** Si $A = \text{diag}(a, a,\ldots, a)$: On dit que A est une matrice scalaire.
- **(h)** Si $A = \text{diag}(1, 1,\ldots, 1)$: On dit que A est la matrice identité et on note $A=I_n$ ou encore $A=I$. On utilisera aussi une notation pratique : $A = (\delta_{ij})$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par : $\delta_{ij} = 1$ si $i=j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$
- **(e)** Si $n=p$ et $\forall i >j$ $a_{ij} = 0$: On dit que A est une matrice triangulaire supérieure
- **(j)** Si $n=p$ et $\forall i <j$ $a_{ij} = 0$: On dit que A est une matrice triangulaire inférieure

Définition 2 : Deux matrices $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ sont égales si :
(1) A et B sont de même format
(2) $\forall i=1,\dots,n \quad \forall j=1,\dots,p \qquad a_{ij}=b_{ij}$

Remarque 1 : Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$. On désigne par $A_i=(a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{ip})$ les n lignes de A et par $A^j=\begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}$ les p colonnes de A. La matrice A peut être considérée comme une suite finie de n lignes et notée $A=\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_n\end{pmatrix}$ ou comme une suite finie de p colonnes et notée $A=(A^1\ A^2\dots A^p)$

I-2. Addition de matrices

Définition 3 : Etant données deux matrices $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ de même format, leur somme est la matrice $C=(c_{ij})$ de même format, dont le terme général c_{ij} est donné par :
$\forall i=1,\dots,n \quad \forall j=1,\dots,p \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ On note : $C=A+B$
L'opération qui à deux matrices A et B associe leur somme C est appelée addition.

Proposition 1 : $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ muni de l'addition est un groupe commutatif
Autrement dit : l'addition est une loi de composition interne dans $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

- **(a)** L'addition est commutative : pour tout A et B éléments de $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ $A+B=B+A$
- **(b)** L'addition est associative : pour tout A, B et C éléments de $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ $A+(B+C)=(A+B)+C$. On écrira donc $A+B+C$.
- **(c)** L'addition admet un élément neutre : pour tout A élément de $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ $A+0=0+A=A$
- **(d)** Toute matrice A admet une matrice opposée : $\forall A\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})\ \exists B\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ $A+B=B+A=0$. On note $B=-A$.

I-3. Produit d'une matrice par un nombre

Définition 4 : Soit $\lambda\in\mathbf{R}$ et $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ le produit de A par λ est la matrice $C=(c_{ij})$ de même format que A, dont le terme général c_{ij} est donné par :
$\forall i=1,\dots,n \quad \forall j=1,\dots,p \qquad c_{ij}=\lambda a_{ij}$ On note : $C=\lambda A$
L'opération qui à une matrice A et à un réel λ associe leur produit $C=\lambda A$ est appelée Produit par un scalaire.

Proposition 2 : Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$ et $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ alors on a :

- **(a)** $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$ on écrira $\lambda\mu A$
- **(b)** $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
- **(c)** $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- **(d)** $1A=A$.

Propriétés 1 : $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ on a :

- **(a)** $0A = 0$
- **(b)** $A+A+\ldots+A = nA$
- **(c)** $-1A = -A$ ce qui permet de définir la soustraction : $A-B = A+(-B)$

Définition 5 : Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, k nombres réels et $A_1, A_2, \ldots A_k$ k éléments de $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$. L'expression $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k$ est une combinaison linéaire des A_i.

Définition 6 : Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, k nombres réels et $A_1, A_2, \ldots A_k$ k éléments de $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des A_i est appelé ensemble engendré par les A_i. On le note $[A_1, A_2, \ldots, A_k]$ ou encore $Gen(A_1, A_2, \ldots, A_k)$.

Définition 7 : k matrices $A_1, A_2, \ldots A_k$ de $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ sont dite liées ou linéairement dépendantes si l'une des ces matrices s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Définition 8 : Soit $A_1, A_2, \ldots A_k$, k éléments de $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$. On dit que ces k matrices sont linéairement indépendantes ou libres si :

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

Remarque 2 : Les deux définitions précédentes se généralisent évidemment aux lignes et colonnes d'une matrice.

I-4. Produit de matrices

Définition 9 : Etant données deux matrices $A=(a_{ij})$ de format $n\times p$ et $B=(b_{jk})$ de format $p\times q$ le produit de A et B (dans cet ordre) est la matrice $C=(c_{ik})$ de format $n\times q$ dont le terme général c_{ik} est donné par : $\forall i=1,\ldots,n$ $\forall k=1,\ldots,q$ $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$ On note : $C = AB$

Proposition 3 : Sous réserve que les conditions sur les nombres de lignes et de colonnes sont satisfaites on a les propriétés suivantes :

- **(a)** $0A = A0 = 0$
- **(b)** La multiplication des matrices n'est pas commutative : $AB \neq BA$ (si $AB=BA$ on dit que A et B commutent)
- **(c)** La multiplication des matrices est « associative » : $A(BC)= (AB)C$. On écrira donc ABC.
- **(d)** La multiplication des matrices est « distributive » sur l'addition:
  pour tout A, B et C $A(B+C)= AB+AC$.
- **(e)** $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ $\forall A$ $\forall B$ $\lambda(AB)=(\lambda A)B$. On écrira λAB.
- **(f)** Si $n=p$ alors $\forall A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. $AI_n = I_n A = A$. On dit que I_n est l'élément neutre pour la multiplication.

Théorème 1 : Soit $A=(a_{ij})$ de format $n\times p$, $B=(b_{jk})$ de format $p\times q$ et $C=(c_{ik})=AB$ leur produit, alors on a:

- **(a)** Les lignes de C sont des combinaisons linéaires des lignes de B. Plus précisément :
  $\forall i=1,\dots,n\ C_i=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}B_j$ où les a_{ij} sont les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A
- **(b)** Les colonnes de C sont des combinaisons linéaires des colonnes de A. Plus précisément :
  $\forall k=1,\dots,q\ C^k=\sum_{j=1}^{p} b_{jk}A^j$ où les b_{jk} sont les coefficients de la $k^{\text{ème}}$ colonne de B

I-5. Transposition

Définition 10 : Soit $A=(a_{ij})$ de format $n\times p$. On appelle <u>transposée de A</u> la matrice $B=(b_{ij})$ de format $p\times n$ dont le terme général b_{ij} est donné par :

$\forall i=1,\dots,p \quad \forall j=1,\dots,n \quad b_{ij}=a_{ji}$ On note : $B={}^tA$

Proposition 4 : Soit $\lambda\in\mathbf{R}$ et A et B deux matrices vérifiant les bonnes conditions sur les nombres de lignes et de colonnes. Alors on a :

- **(a)** ${}^t({}^tA)=A$
- **(b)** ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$
- **(c)** ${}^t(\lambda A)=\lambda\,{}^tA$
- **(d)** ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$

II. Matrices carrées

II-1. Matrices inversibles

Définition 1 : Soit $A\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

On dit que A admet un <u>inverse à gauche</u> s'il existe une matrice $B\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $BA = I$

On dit que A admet un <u>inverse à droite</u> s'il existe une matrice $C\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $AC = I$

On dit que A est <u>inversible</u> si A admet un inverse à gauche et un inverse à droite.

Une matrice non inversible est dite <u>singulière</u>.

Lemme 1 :

- Si A admet un inverse à gauche B et un inverse à droite C alors $B = C$ (et A est inversible).
- Si A est inversible alors son inverse est unique. On note A^{-1}cet inverse.

Proposition 1 : Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On a alors les propriétés suivantes :

- **(a)** Si A est inversible alors son inverse A^{-1} est aussi inversible et on a $(A^{-1})^{-1} = A$
- **(b)** Si A et B sont inversibles alors AB est aussi inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
  et de façon générale si $A_1, A_2, \dots A_k$, sont k matrices inversibles alors le produit $A_1A_2\dots A_k$ est inversible et $(A_1A_2\dots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\dots A_2^{-1}A_1^{-1}$
- **(c)** A est inversible alors ${}^tA$ est aussi inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. On notera ${}^tA^{-1}$.
- **(d)** Si A et B sont inversibles alors ${}^t(A B)^{-1}={}^tA^{-1}\,{}^tB^{-1}$

Définition 2 : Soit $A\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $k\in\mathbf{N}$

<u>La puissance $k^{\text{ème}}$ de A</u>, notée A^k, est définie par : $A^0=I$ $\quad A^k = AA^{k-1}$ pour $k \geq 1$

de même, si A est inversible A^{-k}, est définie par : $A^0=I$ $\quad A^{-k} = A^{-1}A^{-(k-1)}$ pour $k \geq 1$

de même on définit un <u>polynôme de la matrice A</u> par : $P(A)=\lambda_0I+\lambda_1A+\lambda_2 A^2+\dots+\lambda_kA^k$ où les λ_i sont des réels.

Proposition 2 : Soit $A\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $k\in\mathbf{N}$ Alors on a les propriétés suivantes :

- **(a)** $\forall k\in\mathbf{N}\ \ \forall r\in\mathbf{N}\ \ A^k A^r=A^{k+r} \qquad (A^k)^r=A^{kr}$
- **(b)** Si A est inversible alors : $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}=A^{-k}$

Définition 3 : Soit $A\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On appelle <u>trace de A</u> et on note tr(A), le nombre :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition 3 : Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda\in\mathbf{R}$ Alors on a :

- **(a)** $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$
- **(b)** $\operatorname{tr}(\lambda A)=\lambda\operatorname{tr}(A)$
- **(c)** $\operatorname{tr}({}^tA)=\operatorname{tr}(A)$
- **(d)** $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$

II-2. Matrices carrées particulières

Définition 4 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

- **(a)** A est symétrique si ${}^tA=A$
- **(b)** A est antisymétrique si ${}^tA=-A$
- **(c)** A est idempotente si $A^2=A$
- **(d)** A est involutive si $A^2=I$
- **(e)** A est nilpotente s'il existe un entier naturel p tel que $A^p=0$. Si k est le plus petit entier naturel pour lequel $A^k=0$ alors k est l'indice de nilpotence de A.

III. Partition des matrices

III-1. Définitions et premières propriétés

Définition 1 : Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$. On considère deux suites finies de nombres entiers $1\leq i_1\leq i_2 \ldots \leq i_r\leq n$ et $1\leq j_1\leq j_2 \ldots \leq j_s\leq p$
La matrice dont les éléments appartiennent aux (non nécessairement consécutives) lignes d'indices $i_1, i_2, \ldots i_r$ de A et aux (non nécessairement consécutives) colonnes d'indices $j_1\leq j_2 \ldots \leq j_s$ de A est appelée <u>sous-matrice</u> de A. Elle est de format $r\times s$

Lemme 1 : Soit A, B et C trois matrices telles que $AB = C$ alors la sous-matrice de C formée des lignes $i_1, i_2, \ldots i_r$ et des colonnes $j_1, j_2, \ldots , j_s$ est égale au produit de la sous-matrice de A formée par les lignes $i_1, i_2, \ldots i_r$ de A par la sous-matrice formée par les colonnes $j_1, j_2, \ldots , j_s$ de B.

Définition 2 : <u>Partitionner</u> une matrice $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ en <u>blocs</u> c'est se donner des entiers $n_1, n_2, \ldots n_\alpha$ et $p_1, p_2, \ldots , p_\beta$ tels que $\sum_{I=1}^{\alpha} n_I = n$ et $\sum_{J=1}^{\beta} p_J = p$ et définir les $\alpha\times\beta$ sous-matrices (ou blocs) de A . On obtient une <u>partition</u> de A en $\alpha\times\beta$ blocs A_{IJ}.

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p_1} & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p_2} & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
a_{n_1 1} & a_{n_1 2} & \cdots & a_{n_1 p_1} & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
 & & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
 & & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\
 & & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & &
\end{pmatrix}$$

On notera $A =(A_{IJ})$ $I = 1, 2, \ldots ,\alpha$ $J = 1, 2, \ldots , \beta$

Cas particulier 1 :

A peut être partitionnée uniquement en lignes $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_\alpha \end{pmatrix}$

A peut être partitionnée uniquement en colonnes : $A = (A^1\ A^2 \ldots A^\beta)$
(voir la remarque 1 du chapitre I pour un cas encore plus particulier)

Cas particulier 2 :

Si une matrice A peut être partitionnée en blocs sous la forme :

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & A_k \end{pmatrix}$$

où les A_i sont des matrices carrées (pas nécessairement de même ordre) on dit que A <u>est diagonale par blocs</u> et on note : $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k)$. On dit aussi que A est la <u>somme directe</u> des A_i et on note

$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_k$

Définition 3 : Soit A et B deux matrices ayant le même nombre de lignes, on appelle <u>matrice augmentée</u> la matrice $(A \mid B)$ formée des deux blocs A et B. De même si A et B sont deux matrices ayant le même nombre de colonnes, on appelle <u>matrice augmentée</u> la matrice $\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ B \end{pmatrix}$ formée des deux blocs A et B.

Ces définitions se généralisent à un nombre fini de matrices : $(A_1 \mid A_2 \mid \ldots \mid A_k)$ et $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_k \end{pmatrix}$

III-2. Calcul matriciel par blocs

III-2-1. Addition

Si deux matrices A et B de même format ont la même partition par blocs $A = (A_{IJ})$ et $B = (B_{IJ})$ alors $C = A+B$ admet la même partition $C = (C_{IJ})$ et on a $\forall\, I\ \forall\, J\ C_{IJ} = A_{IJ}+B_{IJ}$

III-2-2. Multiplication par un nombre

Soit $\lambda\in\mathbf{R}$ et $A = (A_{IJ})$ une matrice partitionnée, alors $C = \lambda A$ admet la même partition que A et $\forall\, I\ \forall\, J\ C_{IJ} = \lambda A_{IJ}$

III-2-3. Produit de deux matrices

Proposition 1 : Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ partitionnée en lignes $A_1, A_2, \ldots, A_r$ et $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbf{R})$ partitionnée en colonnes $B^1, B^2, \ldots, B^s$. Partitionnons la matrice $C=AB$ en blocs engendrés par la partition en lignes de A et la partition en colonnes de B. Alors $\forall\, I\ \ \forall\, J\ \ C_{IJ}=A_I B^J$

Définition 4 : Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ et $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbf{R})$. Si A est partitionnée en s blocs colonnes $A^1, A^2, \ldots, A^s$ contenant respectivement $p_1, p_2, \ldots, p_s$ colonnes de A ($p_1 + p_2 + \ldots + p_s = p$) et si B est partitionnée en s blocs de lignes B_1 B_2 $\ldots, B_s$ contenant respectivement $p_1, p_2, \ldots, p_s$ lignes de B alors on dit que A et B admettent une partition conforme.

Proposition 2 : Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ et $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbf{R})$ admettant une partition conforme, alors, avec les notations précédentes, on a : $C=AB=A^1B_1+A^2B_2+\ldots+A^sB_s$

Théorème 2 : Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ et $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbf{R})$ partitionnées en blocs de telle manière que la partition en colonnes de A et la partition en lignes de B soit conformes. Alors la matrice $C=AB$ peut être partitionnée en blocs correspondant à la partition en lignes de A et en colonnes de B et on a : $C_{IK} = \sum_{J} A_{IJ} B_{JK}$

Corollaire 1 : Le théorème 1 du I-4 est un corollaire du théorème 2 et on peut l'écrire de la manière suivante : si $C=AB$ alors $\forall i$ $C_i=(AB)_i=A_iB$ et $\forall j$ $C^j=(AB)^j=AB^j$

IV. Opérations élémentaires, matrices élémentaires

IV-1. Opérations élémentaires sur les lignes (o.e.l)

Définition 1 : Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$. On appelle opération élémentaire de lignes L sur la matrice A l'une des trois opérations suivantes :

- **(a)** Multiplier une ligne i de A par un nombre non nul α. On note $L = L_i(\alpha)$
- **(b)** Permuter deux lignes i et j de A . On note $L = L_{ij}$
- **(c)** Ajouter à une ligne i α fois une autre ligne j. On note $L = L_{ij}(\alpha)$

On note $L(A)$ la matrice obtenue à partir de A par une opération élémentaire de lignes.

Remarque 1 : Une opération élémentaire de lignes est une application particulière de $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ dans lui-même.

Définition 2 : On appelle matrice élémentaire toute matrice obtenue à partir de la matrice identité I par une opération élémentaire de lignes. On note $E = L(I)$

Si besoin on précisera : $E_i(\alpha)=L_i(\alpha)(I)$ $\quad E_{ij}=L_{ij}(I)$ $\quad E_{ij}(\alpha)=L_{ij}(\alpha)(I)$

Proposition 1 : Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$, L une opération élémentaire de lignes et $E=L(I)$. Alors $L(A)=EA$

Définition 3 : Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$, L et L' deux opérations élémentaires de lignes. La <u>composée</u> de L et L', dans cet ordre, est une opération sur les lignes obtenue par composition des applications de $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ dans lui-même : $L'\text{o}L(A) = L'(L(A))$

On note $L'L$ et on généralise à la composée de k opérations élémentaires de lignes :

$$L_k\text{o}L_{k-1} \dots L_2\text{o}L_1(A) = L_kL_{k-1} \dots L_2L_1(A) = L_k(L_{k-1} \dots (L_2(L_1(A)) \dots)$$

Remarque 2 : Si E_i sont les matrices élémentaires correspondants aux opérations élémentaires de lignes L_i alors : $L_kL_{k-1} \dots L_2L_1(A) = E_kE_{k-1} \dots E_2E_1A$

Proposition 2 : Les opérations élémentaires de lignes sont inversibles et on a :

$L_i(\alpha)$	a pour inverse	$L_i(\beta)$	avec $\beta=1/\alpha$
L_{ij}	a pour inverse	L_{ij}	
$L_{ij}(\alpha)$	a pour inverse	$L_{ij}(-\alpha)$	

Proposition 3 : Les matrices élémentaires sont inversibles

Proposition 4 : Si E_i sont les matrices élémentaires alors $(E_kE_{k-1}\dots E_2E_1)^{-1}=E_1^{-1}E_2^{-1} \dots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}$

Définition 4 : Une matrice A est <u>ligne-équivalente</u> à une matrice B si B peut être obtenue à partir de A par un nombre fini d'opérations élémentaires de lignes $(B = L_kL_{k-1} \dots L_2L_1(A))$.

On note $A \overset{l}{\sim} B$

Remarque 3 (fondamentale): $A \overset{l}{\sim} B$ si et seulement si il existe une matrice P produit d'un nombre fini de matrices élémentaires telle que $B=PA$

Remarque 4 : P est inversible et, en général, n'est pas unique.

Proposition 5 : La ligne-équivalence est une relation d'équivalence.

Remarque 5 : La proposition précédente permet de parler de « deux matrices ligne-équivalentes ».

Proposition 6 : Soit A et B deux matrices ligne-équivalentes alors
- **(a)** les lignes de B sont des combinaisons linéaires des lignes de A
- **(b)** pour toute matrice C telle que les produits AC et BC soient définis, AC et BC sont ligne-équivalentes

Proposition 7 : Soit A et B deux matrices ligne-équivalentes alors la même séquence d'opérations élémentaires de lignes qui transforme A en B transforme I en P telle que $B=PA$. En particulier si $A \overset{l}{\sim} I$ alors P est un inverse à gauche de A . En pratique il suffit d'appliquer successivement les opérations élémentaires de lignes sur la matrice augmentée $(A | I)$ pour la transformer en $(B | P)$.

V. Matrices ligne-réduites échelonnées (l.r.e)

Définition 1 : Une matrice R de format $n \times p$ est dite ligne-réduite si elle vérifie les conditions suivantes :

- **(a)** toutes les lignes nulles (s'il y en a) sont en dessous des lignes non nulles.
- **(b)** dans chaque ligne non nulle, le premier élément (au sens croissant des indices des colonnes) non nul vaut 1. La colonne où apparaît ce « 1 » s'appelle colonne pivot de la ligne.
- **(c)** tous les autres éléments de la colonne pivot (sauf le « 1 ») sont nuls.

Si de plus, R vérifie la 4$^{\text{ème}}$ condition suivante :

- **(d)** les colonnes pivots apparaissent en ordre croissant (au sens des indices des colonnes). On dit que R est une matrice ligne-réduite échelonnée.

Théorème 3 : Toute matrice A est ligne-équivalente à une matrice ligne-réduite échelonnée R. Cette matrice ligne-réduite échelonnée R est unique. (On dira donc : R est la l.r.e de A)

Théorème 4 :

- Les lignes non nulles d'une matrice ligne-réduite échelonnée sont linéairement indépendantes
- Les colonnes pivots d'une matrice ligne-réduite échelonnée sont linéairement indépendantes
- Les colonnes non pivots d'une matrice ligne-réduite échelonnée s'écrivent comme combinaisons linéaires des colonnes pivots d'indices inférieurs.

Proposition 1 : Deux matrices ligne-équivalentes admettent la même l.r.e

Proposition 2 : Soit R la l.r.e de A , alors les colonnes de A vérifient les mêmes relations (combinaisons) linéaires que les colonnes de R.

VI. Rang de matrices

Définition 1 : Etant donnée une matrice A et R sa l.r.e. On appelle <u>rang de A</u> et on note rang(A) ou rg(A) ou encore r(A), le nombre de lignes non nulles de R.

Propriétés 1 : Etant donnée une matrice $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ et R sa l.r.e, alors :

- rang(A) = nombre de colonnes pivots de R
- rang(A) $\leq$ Min$\{n,p\}$
- rang(A) = nombre de lignes linéairement indépendantes de A

Proposition 1 :

- deux matrices ligne-équivalentes ont le même rang. (la réciproque est fausse en général)
- rang(AB) $\leq$ rang(A)
- si B est inversible alors rang(AB) = rang(A)

Théorème 5 : rang(${}^tA$)=rang(A)

Proposition 2 :

- rang(A) = nombre de colonnes linéairement indépendantes de A
- rang(AB) $\leq$ Min$\{$ rang(A) , rang(B)$\}$
- si B est inversible alors rang(BA) = rang(A)

VII. Systèmes linéaires

VII-1. Systèmes linéaires quelconques

Définition 1 : On appelle <u>système linéaire</u> (ζ) la donnée de n équations linéaires :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p & = & k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p & = & k_2 \\ \quad\quad\vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p & = & k_n \end{cases}$$

où $x_1, x_2, \ldots x_p$ sont les p <u>inconnues</u> du système, $k_1, k_2, \ldots k_n$ sont les n <u>termes du second membre</u> ou <u>constantes</u> et les a_{ij} sont les $n\times p$ <u>coefficients</u> du système.

Remarque 1 (fondamentale): Tout système linéaire peut s'écrire sous la forme d'une équation matricielle
$AX = K$ où $A = (a_{ij})$ est la <u>matrice des coefficients</u>.
$X = {}^t(x_1\ x_2\ \ldots\ x_p)\in\mathbf{R}_c^p$ est la <u>matrice colonne des inconnues</u> et $K={}^t(k_1, k_2, \ldots k_n)\in\mathbf{R}_c^n$ est <u>la matrice colonne des constantes</u>. La matrice $(A\,|\,K)$ est la <u>matrice augmentée</u> du système.

Définition 2 : Lorsque $K=0$ le système est dit <u>homogène</u> ($AX=0$)

Définition 3 : Une <u>solution</u> d'un système linéaire (ζ) : $AX=K$ est la donnée de p nombres $s_1, s_2 \ldots, s_p$ tels que, substitués aux $x_1, x_2, \ldots, x_p$, les n équations linéaires sont simultanément vérifiées.
Trouver une solution d'un système linéaire c'est donc trouver une matrice colonne $S = {}^t(s_1\ s_2\ \ldots\ s_p)\in\mathbf{R}_c^p$ elle que $AS=K$.
Résoudre un système linéaire (ζ) : $AX=K$ c'est trouver l'ensemble des solutions du système. On note $S_{(\zeta)}$ cet ensemble de solutions. $S_{(\zeta)}=\{S\in\mathbf{R}_c^p \text{ tq } AS=K\}$

Remarque 2 : Résoudre un système linéaire (ζ) : $AX = K$ c'est trouver toutes les écritures de K comme combinaisons linéaires des colonnes de A, les coefficients des combinaisons linéaires étant les s_i.

Remarque 3 : Tout système homogène admet $S = 0$ comme solution particulière. On l'appelle <u>solution triviale</u>.

Définition 4 : Un système linéaire est dit <u>incompatible</u> ou <u>contradictoire</u> (ou encore <u>inconsistant</u>) s'il n'admet aucune solution. Le système est dit <u>compatible</u> s'il admet au moins une solution.

Remarque 4 : Le système est compatible si et seulement si K appartient à l'ensemble engendré par les colonnes de A. On appelle <u>espace colonne</u> cet ensemble.

Définition 5 : Deux systèmes linéaires (ζ_1) : $AX = K$ et (ζ_2) : $BX = H$ sont <u>équivalents</u> s'ils ont le même ensemble de solutions. $S_{(\zeta 1)} = S_{(\zeta 2)}$

Remarque 5 : La relation donnée par la définition précédente est une relation d'équivalence.

Proposition 1 : Soit (ζ_1) : $AX = K$ un système linéaire et $(A|K)$ sa matrice augmentée. Si $(A|K)\overset{l}{\sim}(B|H)$ alors les deux systèmes linéaires (ζ_1) : $AX = K$ et (ζ_2) : $BX = H$ sont équivalents.

En pratique: Pour résoudre un système linéaire (ζ_1) : $AX = K$ on le transforme en un système plus simple
(ζ_2) : $RX = H$ par action d'opérations élémentaires de lignes portant sur la matrice augmentée $(A|K)$ jusqu'à obtention de sa l.r.e $(R|H)$. Rappelons que dans ce cas R est la l.r.e de A.

Définition 6 : Soit un système linéaire (ζ) : $AX=K$ et R la l.r.e de A. Si on note $j_1, j_2, \ldots, j_r$ les indices des colonnes pivots de R alors les inconnues $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jr}$ sont appelées <u>inconnues pivots</u>. Les autres inconnues sont appelées <u>inconnues libres</u>.

Théorème 6 (fondamental): On considère un système linéaire (ζ) : $AX = K$
Soit $(A|K)$ la matrice augmentée de (ζ) et $(R|H)$ sa l.r.e. Posons $r = \text{rang}(A) = \text{rang}(R)$.
Alors :

- si $\text{rang}(R|H) > r$ alors le système est incompatible
- si $\text{rang}(R|H) = r$ alors le système est compatible et on distingue deux cas :
  (a) si $r = p$: le système admet une solution unique
  (b) si $r < p$: le système admet une infinité de solutions

Remarque 5 : Dans le dernier cas du théorème précédent ($\text{rang}(R|H) = r < p$) chacune des inconnues pivots s'écrit comme la somme d'une combinaison linéaire des inconnues libres et d'un terme constant h_i. On obtient l'infinité des solutions en donnant des valeurs arbitraires aux inconnues libres.

VII-2. Systèmes linéaires homogènes

Définition 7 : L'ensemble solution d'un système linéaire homogène (ζ) : $AX = 0$ est appelé <u>noyau de la matrice A</u>. On le note $\text{Ker}(A)$.

Proposition 2 : Soit un système linéaire homogène (ζ) : $AX=0$ alors :

- **(a)** $0\in\text{Ker}(A)$
- **(b)** si $S_1\in\text{Ker}(A)$ et $S_2\in\text{Ker}(A)$ alors $S_1+S_2\in\text{Ker}(A)$
- **(c)** si $S\in\text{Ker}(A)$ et $\lambda\in\mathbf{R}$ alors $\lambda S\in\text{Ker}(A)$

Corollaire 1 : Toute combinaison linéaire de solutions d'un système linéaire homogène est aussi solution du système

Corollaire 2 : Etant donné un système linéaire homogène (ζ) : $AX = 0$ avec A de format $n\times p$. Si $\text{rang}(A)<p$ (en particulier si $n<p$) alors le système admet une infinité de solutions (en plus de la solution triviale)

Définition 8 : Soit (ζ) : $AX=0$ un système linéaire homogène et soit $R=(r_{ij})$ la l.r.e de A admettant r colonnes pivots d'indices $j_1, j_2, \ldots, j_r$. Le système (ζ) admet donc r inconnues pivots $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jr}$ et $p - r$ inconnues libres $x_{l(1)}, x_{l(2)}, \ldots x_{l(p-r)}$ (on se place dans le cas général $\text{rang}(A) = r < p$). La solution générale S du système (ζ) est une matrice colonne dont les coefficients sont des combinaisons linéaires des $p - r$ inconnues libres

$x_{l(1)}, x_{l(2)}, \ldots, x_{l(p-r)}$. On définit les solution canoniques $S_1, S_2, \ldots S_{p-r}$ par :
S_α s'obtient à partir de S en remplaçant $x_{l(\alpha)}$ par 1et les autres $x_{l(\alpha')}$ par 0 ($\alpha \neq \alpha'$).

Corollaire 3 : Etant donné un système linéaire homogène (ζ) : $AX = 0$ avec A de format $n \times p$. Si rang(A) < p (en particulier si $n < p$) alors toute solution de (ζ) est une combinaison linéaire des solutions canoniques.

Théorème 7 :
Soit (ζ) : $AX=K$ un système linéaire compatible et S_p une solution particulière de ce système. Alors toute autre solution S du système s'écrit comme $S=S_p+S_h$ où S_h est une solution du système homogène associé $AX=0$.

VIII. Inversion des matrices

Rappel : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

On dit que A admet un <u>inverse à gauche</u> s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $BA=I$

On dit que A admet un <u>inverse à droite</u> s'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $AC=I$

On dit que A est <u>inversible</u> si A admet un inverse à gauche et un inverse à droite.

Une matrice non inversible est dite <u>singulière</u>.

Si A est inversible alors son inverse est unique

Le produit de n matrices inversibles est inversible.

Théorème 8 (fondamental) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ Alors les énoncés suivants sont équivalents :

- **(a)** A est inversible
- **(b)** A admet un inverse à gauche
- **(c)** $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ $AX=AY \Rightarrow X=Y$ (on peut simplifier à gauche par A)
- **(d)** Le système homogène $AX=0$ admet la solution triviale $X=0$ comme unique solution.
- **(e)** rang$(A)=n$
- **(f)** $A \overset{l}{\sim} I$
- **(g)** A est un produit de matrices élémentaires
- **(h)** $\forall K \in \mathbf{R}_c^n$ Le système $AX=K$ admet au moins une solution
- **(i)** A admet un inverse à droite

Corollaire 4 : (une méthode de calcul de l'inverse)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ si $(A|I) \overset{l}{\sim} (I|P)$ alors $A^{-1}=P$

Proposition 1 : Soit $A=A_1 A_2 \dots A_k$ où pour tout $i = 1, 2, \dots, k$ $A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ alors : A est inversible si et seulement si tous les A_i sont inversibles.

Corollaire 5 : $A \overset{l}{\sim} B$ si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que $B=PA$

IX. Déterminants

IX-1. Déterminant d'une matrice carrée

Définition 1 : Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Si $n=1$: On appelle <u>déterminant</u> de A et on note **det**(A) (ou $|A|$) le nombre **det**$(A)=a_{11}$.

Si $n>1$: On appelle <u>déterminant</u> de A et on note **det**(A) (ou $|A|$) le nombre donné par la relation de récurrence $\det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\det M_{1j}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$

où M_{ij} est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

det(M_{ij}) est appelé <u>mineur</u> de a_{ij} et $A_{ij}=(-1)^{i+j}$**det**(M_{ij}) est appelé <u>cofacteur</u> de a_{ij}.

Théorème 9 : (fondamental)

Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors : $\forall p\,\forall q\quad \det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{pj}A_{pj}=\sum_{i=1}^{n} a_{iq}A_{iq}$

Théorème 10 : (pratique)

Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors :

- ❶ **det**(A)=**det**(${}^tA$)
- ❷ Si A contient une ligne ou une colonne nulle, alors **det**(A)=0
- ❸ Si les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont multipliés par un même nombre non nul α, alors le déterminant est multiplié par α : **det**($l_i(\alpha)(A)$)=α**det**(A).
  Par conséquent **det**(αA)=α^n**det**(A).
- ❹ **det**($A^1\, A^2 \ldots A^{k-1}A^kA^{k+1}\ldots {}^n$)+**det**($A^1\, A^2\ldots A^{k-1}B^kA^{k+1}\ldots A^n$)=**det**($A^1\, A^2\ldots A^{k-1}A^k+B^kA^{k+1}\ldots A^n$)
  On a le même résultat pour les lignes.
- ❺ Si la matrice A a deux lignes ou deux colonnes identiques, alors **det**(A)=0
  Si une ligne (resp une colonne) est un multiple d'une autre ligne (resp d'une autre colonne) alors **det**(A)=0.
- ❻ **det**($l_{ij}(\alpha)(A)$)=**det**(A). On a le même résultat pour les colonnes.
- ❼ **det**($l_{ij}(A)$)=**-det**(A)**.** On a le même résultat pour les colonnes.

Lemme 1 :

Si E est une matrice élémentaire correspondant à une opération élémentaire de lignes ($E=E_i(\alpha)=L_i(\alpha)(I)$, ou $E=E_{ij}=L_{ij}(I)$, ou $E=E_{ij}(\alpha)=L_{ij}(\alpha)(I)$)
alors **det**(EA)= **det**(E)**det**(A).

Théorème 11 :

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si **det**(A)$\neq 0$

Théorème 12 :

Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre, alors **det**(AB)= **det**(A)**det**(B).

Corollaire 1 : Si A est inversible, alors $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

IX-2. Déterminants, systèmes linéaires et matrices inversibles

Théorème 13 :

Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ip} = \begin{cases}\det(A) & \text{si } j = p\\ 0 & \text{si } j \neq p\end{cases}$

Théorème 14 :

Etant donné un système linéaire (ζ) : $AX = K$, où $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, si $\mathbf{det}(A)\neq 0$ alors le système admet une solution unique donnée par :

$$\forall i = 1,2,\ldots n \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

où $\Delta = \mathbf{det}(A)$ et $\Delta = \mathbf{det}(A^{(i)})$ où $A^{(i)}$ est la matrice obtenue en remplaçant la $i^{ème}$ colonne de A par K.

Théorème 15 :

Soit A une matrice carrée inversible, alors A^{-1} est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Adj}(A)$$

où Adj(A) est l'adjointe de A . C'est la transposée de la matrice des cofacteurs de A.
Adj(A) = ${}^t(A_{ij})$ où A_{ij} est le cofacteur de a_{ij} dans A.

IX-3. Déterminants et rang

Rappel : Etant donnée une matrice $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$. et R sa l.r.e. On appelle rang de A et on note rang(A) ou rg(A), le nombre de lignes non nulles de R.

Théorème 16 :

Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$. Le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe un mineur d'ordre r non nul.

Comparaison des ordres de grandeur :

Méthode de Gauss : n^3 méthode des déterminants : $n!$

n	1	2	3	4	5	6	7	10
n^3	1	8	27	64	125	216	343	1000
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	3.628.800

X. Espaces vectoriels

X-1. Définitions et premières propriétés

Définition 1 : (Axiomatique d'un espace vectoriel)

Soit E un ensemble non vide et $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels. On dit que E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{R}$ si :

(A) E muni d'une loi interne, notée +, est un groupe commutatif. C'est à dire : E est muni d'une addition qui à tout couple (x,y) de E^2 associe un élément z de E , appelé somme de x et y et noté $z=x+y$. Cette loi interne devant vérifier les quatre propriétés suivantes :

- **(1)** $\forall(x,y,z)\in E^3 \quad x+(y+z)=(x+y)+z$ associativité. On écrira donc $x+y+z$
- **(2)** $\forall(x,y)\in E^2 \quad x+y=y+x$ commutativité
- **(3)** L'addition admet un élément neutre noté 0 : $\forall x\in E \quad x+0=0+x=x$
- **(4)** Tout élément x de E possède un symétrique (on dit aussi opposé) noté $-x$ et vérifiant $\forall x\in E \qquad x+(-x)=(-x)+x=0 \qquad$ (on écrira $x-x=-x+x=0$)

(B) E est muni d'une loi externe, notée multiplicativement par. et associant à tout couple (λ,x) de $\mathbf{R}\times E$ un élément z de E , appelé produit de λ et x et noté $z=\lambda.x=\lambda x$. Cette loi externe devant vérifier les quatre propriétés suivantes :

- **(1)** $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2 \quad \forall x\in E \quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ on écrira : $\alpha\beta x$
- **(2)** $\forall\alpha\in\mathbf{R} \quad \forall(x,y)\in E^2 \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$
- **(3)** $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2 \quad \forall x\in E \quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
- **(4)** $\forall x\in E \quad 1x=x$

Notation :

- Le $\mathbf{R}$-ev E sera noté $(E,+,.)$ ou plus simplement E (s'il n'y a pas d'ambiguïté).
- Les éléments de E sont appelés des vecteurs et notés, souvent, par des lettres latines minuscules.
- Les éléments de $\mathbf{R}$ sont appelés des scalaires et notés, souvent, par des lettres grecques minuscules.

Proposition 1 :

- **(a)** L'élément neutre 0 est unique.
- **(b)** Le symétrique (l'opposé) d'un élément est unique.
- **(c)** L'équation en x : $x+a=b$ admet une solution unique.
- **(d)** La relation $x+y=x+z$ implique $y=z$ (loi de simplification)
- **(e)** $\forall x\in E \quad 0x=0$
- **(f)** $\forall\alpha\in\mathbf{R} \quad \alpha 0=0$
- **(g)** $\forall x\in E \quad -x=(-1)x$ et de façon générale $-(\alpha x)=(-\alpha)x$
- **(h)** $\alpha x=0 \Rightarrow \alpha=0$ ou $x=0$

XI. Sous-espaces vectoriels

Définition 1 : Soit E un **R**-ev et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

- **(a)** $\forall x\in F\ \ \forall y\in F\ \ \ x+y\in F$ (on dit que F est stable par addition)
- **(b)** $\forall \lambda\in \mathbf{R}\ \ \forall x\in F\ \ \lambda x\in F$ (on dit que F est stable par multiplication externe)

Remarque 1 : Cette définition est équivalente à la suivante :
$\forall \lambda\in \mathbf{R}\ \ \forall \mu\in \mathbf{R}\ \ \forall x\in F\ \ \forall y\in F\qquad \lambda x+\mu y\in F$

Proposition 1 : Soit E un **R**-ev alors :

- **(a)** Tout sous-espace vectoriel de E est un **R**-ev.
- **(b)** Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. Et de façon générale si F_i $i=1,\ldots,n$ sont n s.e.v de E alors $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ est un s.e.v de E.
- **(c)** Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors, en général, $F\cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Définition 2 : Soit E un **R**-ev et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G et on note $F+G$ l'ensemble $F+G=\{z\in E \text{ tq } z=x+y \text{ où } x\in F \text{ et } y\in G\}$

Proposition 2 : Soit E un **R**-ev et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F+G$ est un s.e.v de E.

Proposition 3 : Soit $AX=0$ un système linéaire homogène $A\in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$, Alors l'ensemble des solutions de ce système est un s.e.v de $\mathbf{R}_c^{\,n}$ (*Rappel* ce s.e.v est appelé noyau de A)

Définition 3 : Soit E un **R**-ev. On appelle famille de vecteurs de E une suite $(u_1, u_2,\ldots,u_n)$ de vecteurs de E.

Définition 4 : Soit E un **R**-ev et $(u_1, u_2,\ldots,u_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire (CL) des vecteurs de cette famille tout vecteur de E s'écrivant sous la forme : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 +\ldots+ \lambda_n u_n$ où les λ_i sont des nombres réels.

Proposition 4 et Définition 5 : Soit E un **R**-ev et $S=(u_1, u_2,\ldots,u_n)$ une famille de vecteurs de E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de S est un s.e.v de E. On l'appelle sous-espace engendré par S et on le note $[S]$. On dit aussi que la famille S est une famille génératrice de $[S]$ ou encore que les vecteurs $u_1, u_2,\ldots,u_n$ sont générateurs de $[S]$.

Proposition 5 : Soit E un **R**-ev et S et T deux familles de vecteurs de E. Alors :

- **(1)** $S\subset T \Rightarrow [S]\subset[T]$
- **(2)** $[S]$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) s.e.v de E contenant S
- **(3)** Si F et G sont deux s.e.v de E alors $F+G=[F\cup G]$

Définition 6 : Soit $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$

- Le sous-espace de $\mathbf{R}_c^{\,n}$ engendré par les colonnes de A est appelé espace des colonnes de A.
- Le sous-espace de $\mathbf{R}_l^{\,p}$ engendré par les lignes de A est appelé espace des lignes de A.

Définition 7 : Soit E un **R**-ev et F et G deux s.e.v de E. On dit que E est somme directe de F et G si

- **(1)** $E=F+G$
- **(2)** $F\cap G=\{0\}$

On note $E=F\oplus G$ et on dit que F et G sont supplémentaires.

Remarque 1 : Cette définition se généralise à un nombre fini $F_1, F_2, \dots, F_n$ de s.e.v de E. $E=F_1\oplus F_2\oplus\dots\oplus F_n$

Proposition 6 : Soit E un **R**-ev et F et G deux s.e.v de E alors E est somme directe de F et G si et seulement si tout élément de E s'écrit de façon unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

XII. Dépendance et indépendance linéaire

Définition 1 : Soit E un **R**-ev et $S=(u_1, u_2,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que S est une famille libre (ou que les vecteurs $u_1, u_2,\dots,u_n$ sont linéairement indépendants) si :

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\dots+\lambda_n u_n=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$$

Proposition 1 :

- **(1)** Une famille d'un seul vecteur non nul est libre
- **(2)** Une famille libre ne contient jamais le vecteur nul ni aucun vecteur s'écrivant comme combinaison linéaire d'autres vecteurs de cette famille.
- **(3)** Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- **(4)** La famille $S=(u_1, u_2,\dots, u_n)$ est libre si et seulement si $\forall\ u\in[S]\ \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ uniques tels que $u=\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 +\dots+ \lambda_n u_n$

Cas particulier 1 : $E=\mathbf{R}_c^{\,n}$

Une famille $S=(u_1, u_2,\dots,u_p)$ de vecteurs de $\mathbf{R}_c^{\,n}$ est libre si et seulement si le système homogène $AX=0$ admet la solution triviale comme unique solution. Avec $A=(A^1\ A^2 \dots A^p)=(u_1\ \ u_2 \dots u_p)$ et $X\in\mathbf{R}_c^{\,p}$.

Définition 2 : Soit E un **R**-ev et $S = (u_1, u_2,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que S est une famille liée (ou que les vecteurs $u_1, u_2,\dots,u_n$ sont linéairement dépendants) si :

$\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 +\dots+ \lambda_n u_n = 0$

Proposition 2 :

Si une famille $(u_1, u_2,\dots,u_n)$ est liée alors toute (sur-)famille $(u_1, u_2,\dots,u_n, u_{n+1},\dots,u_p)$ est liée.

Cas particulier 2 : $E=\mathbf{R}_c^{\,n}$

Une famille $S = (u_1, u_2,\dots,u_p)$ de vecteurs de $\mathbf{R}_c^{\,n}$ est liée si et seulement si le système homogène $AX=0$ admet une infinité de solutions. Avec $A=(A^1\ A^2 \dots A^p)=(u_1\ \ u_2 \dots u_p)$ et $X\in\mathbf{R}_c^{\,p}$.

Théorème 17 : (fondamental)

Soit $u_1, u_2,\dots,u_n$ n vecteurs d'un **R**-ev E et soit $v_1, v_2,\dots,v_n, v_{n+1}$ $n + 1$ combinaisons linéaires de ces vecteurs. Alors les vecteurs $v_1, v_2,\dots,v_n, v_{n+1}$ sont linéairement dépendants.

XIII. Base et dimension

Définition 1 : Soit $S=(u_1, u_2,\ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un **R**-ev E. On dit que S est une <u>famille génératrice de E</u> (ou que les vecteurs $u_1, u_2,\ldots, u_n$ <u>engendrent E</u>) si $E=[(u_1, u_2,\ldots, u_n)]$ (c.a.d tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des u_i).

Définition 2 : Soit E un **R**-ev et $\mathcal{B}=(u_1, u_2,..,u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une <u>base de E</u> si :

- **(1)** $\mathcal{B}$ est une famille libre
- **(2)** $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E

Proposition 1 : Pour qu'une famille $\mathcal{B}=(u_1, u_2,\ldots, u_n)$ soit une base de E il faut et il suffit que tout vecteur de E s'écrive sous forme <u>unique</u> comme combinaison linéaire des u_i.
c.a.d $u=\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 +\ldots+ \lambda_n u_n$ où les réels λ_i sont <u>uniques</u>. Ces réels λ_i sont appelés <u>coordonnées</u> (ou <u>composantes</u>) de u selon la base $\mathcal{B}$.

Lemme 1 : Soit E un **R**-ev et $S = (u_1, u_2,\ldots, u_r)$ une famille libre de r vecteurs de E et soit u un vecteur de E. Alors : si $u\notin[(u_1, u_2,\ldots, u_r)]$ alors $(u_1, u_2,\ldots, u_r, u)$ est une famille libre de $r+1$ vecteurs de E.

Lemme 2 : Soit F le sous-espace vectoriel engendré par une famille $(u_1, u_2,\ldots, u_r)$ de r vecteurs de E. Si l'un des vecteurs u_j s'écrit comme combinaison linéaire des $r - 1$ autres vecteurs u_i alors F est aussi engendré par la famille $(u_1, u_2,\ldots, u_{j-1}, u_{j+1},\ldots,u_r)$.

Théorème 18 : Soit E un **R**-ev admettant une base de n vecteurs $\mathcal{B} =(e_1, e_2,\ldots, e_n)$ alors toute autre base de E est formée de n vecteurs de E

Définition 3 : Soit E un **R**-ev non réduit à $\{0\}$. On dit que E est <u>de dimension finie</u> s'il existe un entier $n>0$ et une base de E composée de n vecteurs. n est <u>la dimension</u> de E. On note $\dim(E)=n$.

Remarque : Si $E = \{0\}$ E n'admet pas de base on dira alors que E est de dimension finie et sa dimension est égale à 0. $\dim \{0\}=0$.
Si E n'est pas de dimension finie on dit qu'il est de <u>dimension infinie</u>.

Définition 4 :
Soit E un **R**-ev de dimension finie n admettant une base $\mathcal{B} =(e_1, e_2,\ldots, e_n)$ et soit $u= u_1e_1 + u_2e_2 +\ldots+ u_ne_n$ un vecteur de E. On dit que u admet comme <u>représentant</u> le vecteur

$$X_u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n_c$$

Théorème 19 : Soit E un **R**-ev admettant une base de n vecteurs $\mathcal{B} =(e_1, e_2,\ldots, e_n)$ alors

- **(1)** Toute famille libre $(u_1, u_2,\ldots, u_n)$ de n vecteurs de E est une base de E.
- **(2)** Toute famille génératrice $(v_1, v_2,\ldots, v_n)$ de n vecteurs de E est une base de E.

Corollaire 1 : Soit E un **R**-ev de dimension finie n alors

- **(1)** toute famille libre contient au plus n vecteurs
- **(2)** toute famille génératrice contient au moins n vecteurs

Théorème 20 : (théorème de la base incomplète)

Soit E un **R**-ev de dimension finie n alors

- **(1)** toute famille libre de p ($p \leq n$) vecteurs de E peut être complétée en une base de E.
- **(2)** de toute famille génératrice de k ($k \geq n$) vecteurs de E on peut extraire une base de E.

Théorème 21 bis : (théorème de la base incomplète)

Tout sous-espace vectoriel d'un **R**-ev E de dimension finie admet un supplémentaire.

XIV. s.e.v d'espace vectoriel de dimension finie

Définition 1 : On appelle <u>rang</u> d'une famille de vecteurs la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille.

Proposition 1 : Soit E un $\mathbf{R}$-ev de dimension finie n et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. Si $\dim F = \dim E$ alors $F=E$.

Proposition 2 : Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ alors
$\dim [(A^1 , A^2 \ldots, A^p)]= \dim [(A_1 , A_2 \ldots, A_n)]=\text{rang}(A)$

Proposition 3 : Etant donné un système linéaire homogène $AX = 0$ avec A de format $n\times p$ et de rang r alors l'ensemble des solutions de ce système linéaire est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_c^p$ de dimension $p - r$.
Autrement dit $\dim(\text{Noyau}(A))= p - r$.

Théorème 22 : Soit E un $\mathbf{R}$-ev de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
- **(1)** F et G sont supplémentaires
- **(2)** $F\cap G=\{0\}$ et $\dim E = \dim F+\dim G$.

Théorème 23 : Soit E un $\mathbf{R}$-ev de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$.

XV. Changement de base et représentation

Dans toute la suite E est un **R**-ev de dimension finie n muni de deux bases $\mathcal{B}=(e_1, e_2,\ldots,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(f_1, f_2,\ldots,f_n)$ avec :

$$\forall j=1,2,\cdots,n \quad f_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i \quad \text{ou inversement} \quad \forall i=1,2,\cdots,n \quad e_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}f_j$$

Définition 1 : On appelle <u>matrice de changement de base</u> (ou <u>matrice de passage</u>) de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice de la décomposition de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

$$P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Y_{f_1} & Y_{f_2} & \cdots & Y_{f_n} \end{pmatrix}$$ où les Y_{f_j} sont les représentants des f_j selon la base $\mathcal{B}$

La <u>matrice de changement de base</u> (ou <u>matrice de passage</u>) de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est la matrice de la décomposition de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$.

$$Q=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_{e_1} & X_{e_2} & \cdots & X_{e_n} \end{pmatrix}$$ où les X_{e_i} sont les représentants des e_i selon la base $\mathcal{B}$

Proposition 1 : Soit $u\in E$ et X et Y ses deux représentants relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors :

$X=PY$ et $Y=QX$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Théorème 24 : Une matrice P est une matrice de changement de base si et seulement si elle est inversible. Dans ce cas et avec les notations précédentes $Q=P^{-1}$.

XVI. Méthodes pratiques : utilisation de la l.r.e

Soit E un espace vectoriel de dimension fini n et soient $u_1, u_2, \dots, u_p$ p vecteurs de E. On désigne par A^j le représentant de u_j dans $\mathbf{R}_c^{\,n}$ j=1, 2, …p. Soit A la matrice dont les p colonnes sont $A^1, A^2, \dots, A^p$. Les n lignes $A_1, A_2, \dots, A_n$ de A sont des éléments de $\mathbf{R}_l^{\,p}$.
Rappelons que rang($u_1, u_2, \dots, u_p$)=dim [($u_1, u_2, \dots, u_p$)]= rang($A^1, A^2, \dots, A^p$)= dim [($A^1, A^2, \dots, A^p$)].
On se propose de donner une méthode pratique pour trouver une base de [($u_1, u_2, \dots, u_p$)] et éventuellement de la compléter en une base de E.
Soit r le rang de A et R sa l.r.e ; notons $j_1, j_2, \dots, j_r$ les indices des colonnes pivots et soit P une matrice inversible telle que $R=PA$ et $Q=P^{-1}$.
Rappelons que les colonnes pivots $A^{j1}\ A^{j2} \dots A^{jr}$ sont linéairement indépendantes et que les colonnes non pivots sont des combinaisons linéaires des colonnes pivots et que les colonnes de A vérifient les mêmes relations linéaires qui existent entre les colonnes de mêmes indices de R.

Proposition 1 : Avec les hypothèses et les notations précédentes on a :
($A^{j1}, A^{j2}, \dots, A^{jr}$) est une base de [($A^1\ A^2 \dots A^p$)].

Proposition 2 : Avec les hypothèses et les notations précédentes on a :
dim[($A^1\ A^2 \dots A^p$)]= dim[($A_1, A_2, \dots, A_n$)]

Remarque 1 : (Rappel) Malgré l'égalité de leurs dimensions ces deux sous-espaces vectoriels [($A^1, A^2, \dots, A^p$)] et [($A_1, A_2, \dots, A_n$)] sont différents (en général).
[($A^1, A^2, \dots, A^p$)] est appelé sous-espace vectoriel des colonnes (de A)
[($A_1, A_2, \dots, A_n$)] est appelé sous-espace vectoriel des lignes (de A)

Construction de bases : Le théorème 11 revisité de point de vue pratique :
Avec les hypothèses et les notations précédentes on a :
Si $p > n$: la famille ($A^1, A^2, \dots, A^p$) est liée
Si $p < n$: la famille ($A^1, A^2, \dots, A^p$) n'est pas génératrice
Si $r < p$: la famille ($A^1, A^2, \dots, A^p$) est liée
Si $r=p=n$: la famille ($A^1, A^2, \dots, A^p$) est une base

On se pose deux problèmes de construction de bases :

1- Soit ($A^1, A^2, \dots, A^p$) une famille libre de p vecteurs de $\mathbf{R}_c^{\,n}$ avec $p<n$. Comment la compléter en une base de E ?
On peut compléter la famille ($A^1, A^2, \dots, A^p$) en une base de $\mathbf{R}_c^{\,n}$ par les $n - p$ vecteurs $B^k = P^{-1}e_k$ $k = p+1, p+2, \dots, n$ où e_k est le k^{eme} vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}_c^{\,n}$.

2- Soit ($A^1, A^2, \dots, A^p$) une famille génératrice de p vecteurs de $\mathbf{R}_c^{\,n}$ avec $p>n$. Comment en extraire une base de E ?
On peut prendre pour base la famille des n vecteurs constituant les n colonnes pivots.

XVII. Applications linéaires

Définition 1 : Soient E et F deux **R**-ev et $T : E \to F$ une application de E dans F. On dit que T est une <u>application linéaire</u> (ou <u>homomorphisme d'espaces vectoriels</u>) si T vérifie les deux propriétés suivantes :

- **(1)** $\forall u \in E \quad \forall v \in E \qquad T(u+v)=T(u)+T(v)$
- **(2)** $\forall u \in E \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \qquad T(\lambda u)=\lambda T(u)$

Terminologie et notation:

Soit $T : E \to F$ une application linéaire de E dans F. On note $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et on dit que T est un :

- **(1)** <u>homomorphisme d'espaces vectoriels</u>
- **(2)** <u>endomorphisme</u> si $E = F$
- **(3)** <u>isomorphisme</u> si T est un homomorphisme bijectif
- **(4)** <u>automorphisme</u> si T est un endomorphisme bijectif
- **(5)** <u>une forme linéaire</u> si $F = \mathbf{R}$

S'il existe un isomorphisme entre E et F on dit que E et F sont <u>isomorphes</u>.

Proposition 1 :

Soit $T : E \to F$ une application linéaire de E dans F. On a :

- **(1)** $T(0)=0$
- **(2)** $T(-u)=-T(u)$
- **(3)** La définition 1 est équivalente à :
  $\forall u \in E \quad \forall v \in E \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \forall \mu \in \mathbf{R} \qquad T(\lambda u+\mu v)=\lambda T(u)+\mu T(v)$
- **(4)** $\forall u_1, u_2, \cdots, u_n$ de $E \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ de $\mathbf{R} \quad T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(u_i)$

Proposition 2 : (fondamentale)

Soit $T : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie alors T est complètement déterminée par son action sur une base de E.

Proposition 3 :

Soit E est un **R**-ev de dimension finie n et $\mathcal{B}=(e_1, e_2,\ldots,e_n)$ une base de E. Etant donnés n vecteurs $f_1, f_2,\ldots,f_n$ de F , l'application $T : E \to F$ qui au vecteur $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ de E fait correspondre le vecteur $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ de F est une application linéaire de E dans F.

Corollaire 1 :

Si E est un **R**-ev de dimension finie n, il existe une et une seule application linéaire $T : E \to F$ telle que l'image d'une base de E soit constituée par n vecteurs donnés de F.

XVIII. Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Définition 1 : Soient E et F deux **R**-ev et $T : E \to F$ une application linéaire de E dans F. On appelle <u>noyau</u> de T l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par T est le vecteur nul de F. On note Ker(T) le noyau de T.
On appelle <u>image</u> de T et on note Im(T) l'ensemble des vecteurs de F admettant au moins un antécédent par T.

Proposition 1 :
Soit $T : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors :
- **(1)** Ker(T) est un sous-espace vectoriel de E.
- **(2)** Im(T) est un sous-espace vectoriel de F.
- **(3)** T est injective si et seulement si Ker(T) = $\{0\}$
- **(4)** T est surjective si et seulement si Im(T) =F.
- **(5)** si T est un isomorphisme de E sur F alors T^{-1} est un isomorphisme de F sur E

Proposition 2 :
Soit $T : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors :
- **(1)** l'image d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F
- **(2)** l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E

Lemme 1 : Soit $S = (u_1, u_2,\ldots,u_n)$ une famille libre de n vecteurs d'un **R**-ev E et $T : E \to F$ une application linéaire injective de E dans F. Alors la famille $(T(u_1), T(u_2),\ldots,T(u_n))$ est une famille libre de vecteurs de F.

Théorème 25 :
Soit E et F deux **R**-ev de dimension finie et $T : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
- **(1)** T est un isomorphisme entre E et F
- **(2)** dim(E)=dim(F) et Ker(T)=$\{0\}$

Lemme 2 :
Si E est un **R**-ev de dimension finie , et $T : E \to F$ une application linéaire alors Im(T) est de dimension finie.

Théorème 26 : (théorème du noyau-image)
Soit E et F deux **R**-ev et $T : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors si la dimension de E est finie il en est de même de Ker(T) et de Im(T) et on a :
$\dim(E)=\dim\mathrm{Ker}(T)+\dim\mathrm{Im}(T)$

Définition 2 :
Soit E et F deux **R**-ev E de dimension finie et $T : E \to F$ une application linéaire de E dans F. On appelle <u>rang de T</u> , et on note rang(T), la dimension de Im(T).

Corollaire 2 :
Avec les hypothèses du théorème 16 on a : $\mathrm{Ker}(T)=\{0\} \Leftrightarrow \dim(T(E))=\dim\mathrm{Im}(E)$

XIX. Opérations sur les applications linéaires

Dans toute la suite E et F sont deux **R**-ev et $\mathcal{L}(E,F)$ (ou $\mathcal{H}om(E,F)$) désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Si $E=F$ on notera $\mathcal{L}(E)$ (ou $\mathcal{H}om(E)$).

XIX-1 Somme de deux applications linéaires

Définition 1 : Soient U et V deux éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ La somme de U et V est une application S de E dans F. définie par : $S=U+V : E \to F$ $\forall x \in E$ $S(x)=(U+V)(x)=U(x)+V(x)$

Proposition 1 : $\mathcal{L}(E,F)$ muni de cette addition est un groupe commutatif.

XIX-2 Produit d'une application linéaire par un nombre

Définition 2 : Soient $U\in\mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda\in\mathbf{R}$ Le produit de U par λ est une application S de E dans F. définie par :

$S=\lambda U : E \to F$ $\forall x\in E$ $S(x)= (\lambda U)(x)=\lambda U(x)$

Proposition 2 : $\mathcal{L}(E,F)$ muni de l'addition et de la multiplication par un nombre est un **R**-ev.

XIX-3 Composition de deux applications linéaires

Définition 3 : Soient $U\in\mathcal{L}(E,F)$ et $V\in\mathcal{L}(F,G)$ La composée de U et de V (dans cet ordre) est une application S de E dans G. définie par :

$S=V \circ U : E \to G$ $\forall x\in E$ $S(x)=(V\circ U)(x)=V(U(x))$

Proposition 3 : Soient $U\in\mathcal{L}(E,F)$ et $V\in\mathcal{L}(F,G)$ alors $V\circ U\in\mathcal{L}(E,G)$.

Théorème 27 : Si E et F sont deux **R**-ev de dimension finie alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un **R**-ev de dimension finie et
$\dim\mathcal{L}(E,F)=\dim(E) \times \dim(F)$.

XX.Représentation matricielle d'une application linéaire

Dans toute la suite E et F sont deux **R**-ev de dimension finie, $\mathcal{B}=(e_1, e_2,\ldots,e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}'=(f_1, f_2,\ldots,f_n)$ une base de F et $T : E \to F$ une application linéaire de E dans F.
Rappelons qu'une application linéaire $T : E \to F$ est complètement déterminée par son action sur une base de E. C.a.d que T est complètement déterminée si on connaît tous les $T(e_j)$ pour $j=1, 2, \ldots,p$ ou encore si on connaît tous les a_{ij} tels que $T(e_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \quad \forall j=1,2,\cdots,p$

Définition 1 : On appelle <u>représentation matricielle</u> (ou <u>matrice</u>) de l'application linéaire T relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice de format $n\times p$ de terme général a_{ij}. On note ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}(T)_{\mathcal{B}'}$

$$ {}_{\mathcal{B}}M(T)_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} $$

Remarque 1 : S'il n'y a pas d'ambiguïté sur les bases on note M(T). S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'application linéaire T on note tout simplement M.

Proposition 1 :
Soit $T : E \to F$ une application linéaire de E dans F. E et F sont deux **R**-ev de dimension finie munis des bases $\mathcal{B}=(e_1, e_2,\ldots,e_p)$ et $\mathcal{B}'=(f_1, f_2,\ldots,f_n)$ et soit $M={}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}(T)_{\mathcal{B}'}$ alors $\forall u\in E$ le représentant de $T(u)$ dans $\mathbf{R}_c^{\,n}$ est donné par $M.X_u$ où X_u est le représentant de u dans $\mathbf{R}_c^{\,p}$.

Théorème 28 :
Soient E et F deux **R**-ev de dimension finie munis des bases $\mathcal{B}=(e_1, e_2,\ldots,e_p)$ et $\mathcal{B}'=(f_1, f_2,\ldots,f_n)$. Notons $\mathcal{L}(E,F)$ le **R**-ev des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R})$ le **R**-ev des matrices de format $n\times p$. Alors : l'application

$$ \mathcal{M} : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbf{R}) $$
$$ T \to \mathcal{M}(T)={}_{\mathcal{B}}M(T)_{\mathcal{B}'} $$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 29 :
Soient E, F et G trois **R**-ev de dimension finie munis des bases $\mathcal{B}=(e_1, e_2,\ldots,e_p)$, $\mathcal{B}'=(f_1, f_2,\ldots,f_n)$ et $\mathcal{B}''=(g_1, g_2,\ldots,g_q)$. Soit $U\in\mathcal{L}(E,F)$ et $V\in\mathcal{L}(F,G)$. Notons M(U) la matrice de U relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et Notons M(V) la matrice de V relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ et soit
$T=V\circ U$. Alors la matrice de T relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$ est donnée par : M(T)=M(V) M(U).

Corollaire 1 :
Soit $T\in\mathcal{L}(E,F)$ de matrice M(T) alors T est un isomorphisme si et seulement si M(T) est inversible et dans ce cas $\mathrm{M}(T^{-1})=\mathrm{M}(T)^{-1}$.

XXI. Applications linéaires et changement de base

Rappel :

$\mathcal{B}$ =(e_1, e_2,…,e_n) et $\mathcal{B}$'=(f_1, f_2,…,f_n) sont deux bases d'un même **R**-ev E, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$' est donnée par : $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{f_1} & X_{f_2} & \cdots & X_{f_n} \end{pmatrix}$ où les X_{f_i} sont les représentants des f_i selon la base $\mathcal{B}$

et où $\forall j = 1,2,\cdots,n \quad f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ ou inversement $\forall i = 1,2,\cdots,n \quad e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j$

Remarque 1 : La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$' est aussi la matrice de l'identité de E muni de la base $\mathcal{B}$' vers E muni de la base $\mathcal{B}$.

XXI-1 Changement de base et endomorphisme

Théorème 30 :
Soit E un **R**-ev de dimension finie, $\mathcal{B}$ =(e_1, e_2,…,e_n) et $\mathcal{B}$'=(f_1, f_2,…,f_n) sont deux bases de E et P = (a_{ij}) la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$'. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$. Soit A' sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$'. On a alors $A'=P^{-1}AP$.

XXI-2 Changement de base et homomorphisme

Théorème 31 :
Soit E un **R**-ev de dimension finie, $\mathcal{B}$ =(e_1, e_2,…,e_p) et $\mathcal{B}$'=(e'_1, e'_2,…,e'_p) deux bases de E et F un **R**-ev de dimension finie, $\mathcal{F}$=(f_1, f_2,…,f_n) et $\mathcal{F}$'=(f'_1, f'_2,…,f'_n) deux bases de F et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$'. Q la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}$' Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et A sa matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$. Soit A' sa matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$' et $\mathcal{F}$'. On a alors $A'=Q^{-1}AP$.

Remarque 2 :
On a deux cas particuliers de ce théorème
- **(1)** si E est muni d'une seule base $\mathcal{B}$ et F est muni de deux bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$' on $A'=Q^{-1}A$.
- **(2)** si E est muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$' et F est muni d'une seule base $\mathcal{F}$ on $A'=AP$.

XXI-3 Changement de base et l.r.e

Toute matrice A peut être considérée comme la matrice d'une application linéaire dans des **R**-ev appropriés. De même toute matrice élémentaire représentant une opération élémentaire de lignes se traduit par un changement de base. La l.r.e R de A n'est donc rien d'autre que la représentation matricielle de la même application linéaire relativement à de nouvelles bases.

Proposition 1 : Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ de matrice M alors rang(T)=rang(M).

TABLE des MATIERES