Notes de cours - Denise Grenier 03/10/07

La *théorie des champs conceptuels* et le modèle de *conception*

G. Vergnaud est l'auteur de la « théorie des champs conceptuels », travail qu'il a entrepris en 1980. Il la décrit comme « une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage de compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques. » (Vergnaud, 1990).

L'hypothèse première qui est faite dans les recherches en didactique des sciences est que l'acquisition du sens ou des significations d'un concept (ou d'une connaissance) se fait à partir de la confrontation à des situations problématiques qui mettent en jeu le concept (ou la connaissance). Vergnaud parle d'un « processus d'élaboration pragmatique » du concept, affirmant que ce processus est « essentiel pour la psychologie et la didactique, comme il est d'ailleurs essentiel pour l'histoire des sciences. »

Dans le cadre de la théorie des champs conceptuels, sont définis et développés différents modèles dont nous allons expliciter les principaux.
Un ***schème*** est un outil qui décrit l'organisation invariante de la conduite d'une personne dans une classe de situations. « C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire » (op. cit.).

Reprenons l'exemple que Vergnaud donne du schème de la résolution des équations de la forme ax+b=c. chez des élèves de cinquième et quatrième :
- en soustrayant b des deux côtés de l'égalité, on conserve l'équation,
- en divisant par a des deux côtés de l'égalité, on conserve l'équation.

Ce schème, très efficace (et fiable) lorsque a, b et c sont des valeurs numériques positives et que b<c, se révèle moins fiable chez ces élèves par exemple pour l'équation : $1/2x - 3 = 1$.

Le concept de *schème* est considéré par Vergnaud comme un concept fondamental de la psychologie cognitive, mais aussi de la didactique. Il est composé de règles d'action et d'anticipations, mais aussi d'invariants opératoires.

Ces sont essentiellement les ***invariants opératoires*** que la didactique des mathématiques a investi pour ses recherches. Vergnaud distingue des invariants opératoires de trois types logiques :
- des invariants de type « propositions » ; les ***théorèmes–en-acte*** en font partie, ils peuvent être vrais ou faux ; Un théorème-en-acte désigne « les propriétés des relations saisies ou utilisées par l'élève en situation de résolution de problème, étant entendu que cela ne signifie pas qu'il est capable pour autant de les expliciter ou de les justifier » ;
- des invariants de type « fonction propositionnelle » : ils sont indispensables à la construction de propositions ; les *concepts-en-acte* ou *catégories-en-acte* en font partie ;
- des invariants de type « argument » ; en mathématiques, les arguments peuvent être des objets, des nombres.

Nous utiliserons aussi, dans nos analyses didactiques les termes de ***règles d'action***, ***propriétés–en-acte***, c'est-à-dire des règles, propriétés auxquelles les stratégies ou les réponses (dans les productions des élèves) sont conformes ; ce sont donc les propriétés vraies ou fausses) attribuées à un concept par les élèves pour résoudre le problème.

Ces invariants (qui constitue le *signifié*), *règles d'action*, *théorèmes-en-acte*, ont leur **domaine d'application**, c'est-à-dire l'ensemble des situations où ils peuvent apporter une réponse et leur **domaine de validité**, c'est-à-dire l'ensemble des situations où ils donnent une réponse exacte. Généralement, ce domaine de validité est non vide. Il peut même sembler très grand à l'élève parce que les situations qu'il rencontre le « renforce ».

Dans cette approche théorique, **une production erronée** (une « erreur ») provient de l'application d'une règle d'action ou d'un *théorème-en-acte* hors de leur domaine de validité. L'erreur est pour nous constitutive de la connaissance, car toute connaissance, à tout niveau, est locale et on ne peut connaître le domaine de validité d'une connaissance si l'on en n'a pas établi ses limites.

Dans cette modélisation de l'acquisition des connaissances, un concept se construit donc, pour l'individu, à travers les nombreuses situations qui le questionnent ou l'utilisent. Et le sens qui se construit est lié aux types de situations où l'individu l'a rencontré. Cependant, le sens n'est contenu entièrement ni dans les situations elles-mêmes, ni dans les seuls mots et symboles associés. **Le langage** et les autres *signifiants* (représentations graphiques ou géométriques, tableaux, équations caractéristiques, etc..) participent à la construction du sens du concept, et ils ont une double fonction de communication et de représentation.
On voit bien les conséquences de cela : ce n'est pas parce qu'on dispose d'un ensemble de définitions, propriétés, théorèmes, du concept que l'on est sûr d'en maîtriser le sens. Les questions, difficultés et échecs de l'enseignement scolaire depuis des décennies sont là pour l'attester : un cours aussi parfaitement écrit soit-il, aussi « complet » soit-il, ne peut assurer à lui seul l'apprentissage.

Vergnaud modélise un concept par un **« triplet de trois ensembles** C={S, I, $\mathcal{S}$} où

S est l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept,

I est l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationalité des schèmes (le signifié),

$\mathcal{S}$ est l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant). »

Exemple. Le concept de « droite » en géométrie euclidienne se construit dans des situations aussi diverses que des problèmes de construction ou de reconnaissance, l'utilisation des propriétés du concept pour résoudre d'autres questions, le travail sur les équations caractéristiques, etc…
Les invariants opératoires sont les axiomes, définitions, propriétés caractéristiques et théorèmes qui concernent le concept de droite ; chacun de ces invariants est plus ou moins fonctionnel selon le type de situations considéré.
Les signifiants sont les équations, les représentations graphiques, la règle comme outil de construction , etc.

Enfin, comme les concepts scientifiques ne sont jamais seuls et ne peuvent être totalement isolés, il est nécessaire de prendre en compte les relations entre les différents concepts mis en jeu dans toute situation. ergnaud définit un ***champ conceptuel*** comme « un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion. » (op. cit.).

Cette notion de *champ conceptuel* permet de :
- replacer un concept dans un ensemble de concepts qui lui sont voisins ;
- préciser les classes de problèmes où ces concepts sont outils de résolution (donc préciser leurs significations).

G.Vergnaud (op. cit.) a lui-même étudié plus particulièrement les champs conceptuels des structures additives et multiplicatives.

Pour éclaircir la signification et la portée de ces modèles, prenons quelques exemples.

• Exemple 1

Les résultats de travaux de recherche sur le nombre décimal (Grisvard C., Léonard F., 1981) ont permis aux auteurs de montrer que les réponses fausses d'élèves de collège, et sans doute beaucoup de réponses exactes, sont conformes à l'application d'une règle d'action qui peut se décomposer en deux sous-règles :
- un algorithme de comparaisons des entiers ;
- la distinction entre les chiffres avant et après la virgule.

Lorsque les parties entières sont égales, la comparaison des parties décimales est conforme dans 80% des cas à l'une des deux règles d'action ci-dessous (la règle d'action R1 est très majoritaire):

règle R1 : le nombre qui a le plus grand « entier » est le plus grand.
exemples : *12,113 > 12,4 car 113 > 4*
12,8 > 12,4 car 8 > 4

règle R2 : le nombre qui a le plus grand nombre de décimales est le plus petit.
exemples : *12,04 < 12,4*
12,98 < 12,9.

Ces deux règles d'action ont chacune leur propre domaine d'application (mais ni R1, ni R2 ne permettent d'obtenir un ordre total) et un domaine de validité non vide. Ainsi, R1 donne une réponse exacte lorsque les deux nombres décimaux à comparer sont dans le même Di (Di désigne l'ensemble des décimaux ayant i chiffres significatifs après la virgule).

Et le fait que, dans les pratiques d'enseignement, les comparaisons des décimaux concernent très souvent des nombres d'un même Di renforce la règle R1.

Dans l'ensemble des problèmes d'ordonnancement de décimaux, un signifiant joue un rôle particulier dans la mise en place chez l'élève de la règle d'action R1 : c'est le choix unique d'écriture du nombre décimal dans les institutions scolaires actuels : un décimal s'écrit comme « un entier, virgule, un entier ». Cette représentation symbolique favorise l'analyse du nombre décimal comme « deux entiers que l'on peut regarder séparément ». Une autre écriture, qui a existé un temps dans l'enseignement au collège, permettrait de remettre en question l'opérationalité à la fois de R1 et de R2 :

« a est un décimal s'il existe deux entiers naturels n et m tels que $a=n\ 10^{-m}$. ». Avec des conditions sur n et m, cette écriture est unique.

• Exemple 2

Des travaux sur la transformation plane « symétrie orthogonale » (Grenier, 1988) ont permis de repérer, dans des problèmes de « construction à main levée du symétrique d'un segment », une règle d'action très répandue chez les élèves de collège :

« Le symétrique d'un point est à égale « distance » de l'axe que le point donné, cette distance étant prise le long de l'horizontale dans la feuille ». [1]

Une grande partie des réponses erronées des élèves de collège proviennent d'une construction conforme à cette règle d'action. Bien sûr, on ne peut en repérer l'utilisation que lorsqu'elle donne une réponse erronée. Le domaine de validité de cette règle est l'ensemble des problèmes de construction où l'axe de symétrie est « vertical » dans la feuille. Si les multiples directions possibles de l'axe dans la feuille étaient équiprobables, le domaine de validité serait restreint. Mais deux éléments jouent en faveur de la stabilisation de cette règle d'action chez les élèves. D'abord, le rapport de l'élève à l'objet culturel « symétrie » : celui-ci correspond presque exclusivement à la symétrie axiale à axe vertical. Ensuite, le fait (attesté par une analyse de l'objet d'enseignement) que la plupart des manuels de collège et des pratiques d'enseignement (à l'époque où cette étude a été réalisée) privilégient largement les situations où l'axe est vertical.

Comme dans l'exemple précédent, on a encore ici de manière évidente le fait qu'une pratique didactique usuelle (l'axe de symétrie est vertical dans la feuille) risque de conforter chez les élèves une règle d'action erronée.

• Exemple 3

Les règles d'action suivantes, très répandues au delà de la scolarité obligatoire,

$$a/b + c/d = (a+c) / (b+d)$$
$$| a + b | = | a | + | b | ,$$
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 ,$$
$$\sqrt{(a + b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

peuvent être considérées comme relevant du même théorème-en-acte

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ et } f(na)=nf(a)$$

qui est l'attribution de la **propriété de linéarité** à un ensemble très large de fonctions et d'opérateurs, ici aux fonctions valeur absolue, carré, racine carrée d'un nombre réel et à l'addition de rationnels.

Ce passage de règles d'action sans lien direct au théorème-en-acte permet de mieux comprendre pourquoi ces règles d'action perdurent si longtemps dans le cursus scolaire, alors que leur domaine de validité est restreint au seul point (0,0) de RxR.
Ce théorème-en-acte peut être une conséquence des apprentissages de base en mathématiques. En effet, les opérations sur les entiers (tables d'addition et de multiplication) à l'école élémentaire, la proportionnalité dans les quatre années de collège qui débouche en fin de troisième sur les représentations graphiques des fonctions f(x)=ax et f(x)=ax+b (confusion entre « droite » et « linéaire ») relèvent tous de la linéarité.

[1] (horizontale correspond à direction parallèle au bord de longueur 21cm de la feuille 21x29,7).

• **Exemple 4**

Les règles d'action et propriétés-en-acte suivantes, qui concernent les rapports entre opérations et ordre dans les réels se retrouvent à différents niveaux.

« Si l'on multiplie (resp. divise) un nombre par un autre, il augmente (resp. diminue) »
« Le carré d'un nombre est plus grand que le nombre. »
« La racine carrée d'un nombre est plus petite que le nombre. »
« Pour tout nombre, il existe un nombre situé juste avant lui. »

Le théorème-en-acte sous-jacent est la **généralisation aux nombres réels des propriétés des nombres entiers naturels**. En effet, ces règles sont vraies dans N et l'apprentissage des nombres entiers et de leurs propriétés est un des premiers en mathématiques et un thème important de l'école élémentaire.

2. Le modèle de *conception*

Après avoir cerné les sens d'un concept scientifique à partir des situations qui le caractérisent, des invariants opératoires et des signifiants associés, il s'agit maintenant, pour le chercheur, de construire un modèle pour rendre compte des connaissances d'une personne sur un concept et du fonctionnement de ces connaissances à un moment donné.

Le modèle de conception a pour double objectif de :
- mettre en évidence la **pluralité des points de vue possibles sur un même concept,** les modes de traitement associés, leur adaptation à la résolution de telle classe de problèmes;
- de **différencier le savoir que l'enseignant veut transmettre des connaissances effectivement construites par l'élève.**

Ces deux nécessités sont développées par M. Artigue (1990). Nous y revenons plus loin. Nous allons décrire l'évolution de ce modèle didactique dans le temps, et aussi ses invariants.

Un premier modèle de conception a été bâti, à destination de la didactique des mathématiques, à partir des notions de représentation et de conception utilisées par la psychologie cognitive, mais aussi à partir de la définition d'un concept. En effet, G. Brousseau (1986) décrit un premier « modèle » de conception comme
« un ensemble de règles, de pratiques, de savoirs qui permettent de résoudre une classe de situations et de problèmes de façon à peu près satisfaisante, alors qu'il existe une autre classe de situations où cette conception échoue, soit qu'elle suggère des réponses fausses, soit que les résultats sont obtenus difficilement et dans des conditions défavorables. »
Dans le même temps, Douady [2] utilise les termes « modèle implicite ».

M. Artigue (1988) va s'appuyer sur la théorie des champs conceptuels de Vergnaud, en partant de l'idée que la notion de conception est l'analogue du côté du sujet du triplet C={S, I, $\mathcal{S}$) qui décrit un concept.

[2] Douady R. (1980) Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire, . *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.1.1., pp.77-110.

Elle caractérise ainsi une conception par
« un triplet :
- la classe des situations-problèmes qui donnent du sens au concept;
-l'ensemble des signifiants associés (images mentales, représentations, expressions symboliques) ;
- les outils (règles d'action, théorèmes-en-acte, algorithmes) dont on dispose pour manipuler le concept. »

Cette caractérisation est la référence classique dans les travaux de didactique des mathématiques, lorsqu'on parle de conception. Cependant, Artigue elle-même reconnaît que ce modèle n'est pas opératoire, essentiellement parce qu'il est difficile, voire impossible, d'inférer de l'observation de l'élève dans quelques situations, la globalité de sa conception sut tel ou tel objet mathématique (Artigue, 1990). De plus, les conceptions peuvent être induites par l'enseignement, mais aussi être d'ordre culturel ou social et donc construites hors du système scolaire.

Ce qui est pertinent, c'est « l'identification de conceptions locales qui se manifestent en situation et l'analyse de passage de telle conception locale à telle autre […] ». Dans la pratique des travaux en didactique, c'est bien la notion de conceptions locale qui est utilisée et qui se révèle efficace.
L'étude des conceptions sur un concept donné peut se faire selon deux approches différentes, qui nous semblent complémentaires :
- à partir de l'analyse d'observations directes de comportements d'élèves en résolution de problèmes : c'est-à-dire à partir de l'analyse de leurs stratégies, discours, productions ;
- à partir de l'étude épistémologique du concept, en liaison avec ses différentes définitions et propriétés dans le savoir savant et leur évolution dans l'histoire.

On peut par exemple utiliser les conceptions repérées par l'analyse historico-épistémologique pour analyser des observations d'élèves. Citons les travaux de M. Artigue sur le cercle à l'école élémentaire (Artigue 1982), ceux de A. Sierpinska (1985) sur la notion de limite (la tangente comme limite d'une famille de droites), mais il y en a bien d'autres encore.

Pour terminer, il nous faut donner la dernière évolution du modèle de conception, construite par N. Balacheff dans un objectif de théorisation des E.I.A.H., qui nécessite de rendre « calculables » les situations didactiques[3].

N. Balacheff (cours à l'Ecole d'été de didactique d'août 2003) caractérise une conception C par
« un quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel :
- P est un ensemble de problèmes sur lequel C est opératoire ;
- R est un ensemble d'opérateurs ;
- L est un système de représentation, il permet d'exprimer les éléments de P et de R ;
- Σ est une structure de contrôle, elle assure la non-contradiction de C. En particulier, un problème p de P est résolu s'il existe r de R et s de Σ tel que s(r(p)) = vrai. »

[3] Ce modèle CKC est repris et développé dans le cours de l'UE2.

Exemples de conceptions sur quelques concepts mathématiques

Certains de ces exemples sont travaillés dans ce cours, pour les autres, on peut étudier les références données dans la bibliographie.

• Exemple 1

L'analyse de productions d'élèves de collège, dans des situations de construction de symétriques de figures, permet d'inférer la conception très majoritaire suivante :
« *Le symétrique d'une figure par rapport à une droite est une figure de même nature, de mêmes dimensions (figure "égale"), située de l'autre côté de la droite, à une "distance" égale, cette distance étant prise le long de directions privilégiées (Orthogonale à l'axe, Verticale ou Horizontale dans la feuille, ou en Prolongement d'un segment de la figure).* »

On retrouve bien, dans cette conception locale telle qu'elle est décrite ici, la classe des problèmes concernés (construction de symétriques par rapport à un axe donné), quelques invariants opératoires et signifiants décrits au paragraphe précédent. En particulier, on peut retrouver les règles de construction erronées de type « rappel horizontal » ou « parallélisme »), ainsi que les difficultés des élèves lorsque la figure coupe l'axe de symétrie.[4]

Ce modèle permet d'expliquer la majorité des erreurs et des difficultés des élèves de collège dans des problèmes de construction de symétriques, mais aussi, comme je l'ai montré dans ma thèse (Grenier, 1988), elle permet de prédire des comportements d'élèves dans une autre classe de problèmes : reconnaissance d'axes de symétrie de figures. Or, ces deux classes de problèmes forment l'essentiel du contenu de l'enseignement de cette notion au collège.

• Exemple 2

Des travaux didactiques sur les connaissances des élèves du secondaire sur les nombres réels ont montré la persistance d'une *conception du nombre décimal comme couple d'entiers*. Cette conception permet d'expliquer de nombreuses erreurs dans les opérations sur les décimaux, par exemple :

$$1{,}2 + 5{,}9 = 6{,}11$$
$$12{,}25 > 12{,}8 \text{ car } 25 > 8$$
$$(5{,}3)^2 = 25{,}9$$
$$2(4{,}9) = 2{,}3$$

Cette conception permet aussi d'expliquer l'origine de certaines difficultés dans l'apprentissage de la notion de racine carrée et, plus tard, dans la compréhension des nombres réels.

• Exemple 3

M. Artigue et J. Robinet (1982) se sont posées la question du sens à attribuer à l'objectif d'enseignement « connaissance de figure simples du plan et de l'espace » qui figurait dans les programmes de l'école élémentaire de l'époque. Parmi les figures « simples », elles ont porté leur choix sur le cercle.

[4] On peut lire sur le sujet les travaux de D. Grenier.

Une double analyse épistémologique et d'activités de classe a permis (en particulier) d'inférer une conception très majoritaire du *cercle comme « courbe plane fermée, de courbure constante, dont les cordes maximales ont même mesure dans toutes les directions »*.
En revanche, les éléments caractéristiques du cercle, tels que le centre et le rayon, sont absents comme invariants opératoires.

Cette conception est très efficace dans des situations de reconnaissance de cercles parmi des figures données (c'est une des situations analysées par les chercheurs). En revanche, elle ne permet pas de construire des cercles et surtout elle ne e rattache pas de manière immédiate à la seule définition du cercle utilisée dans l'enseignement secondaire.

Eléments de méthodologie

Le modèle didactique de *conception* concerne un ou une classe de concepts donnés : le didacticien cherche à établir une ou des « conceptions sur un concept scientifique O d'une population d'individus, dans un type de problèmes ».

Une méthodologie devenue relativement « classique » en didactique des sciences consiste en une double approche complémentaire : une analyse *épistémologique* du concept O et une étude des connaissances d'élèves sur O, à partir de données expérimentales obtenus en résolution de problèmes (stratégies de résolution, débats, productions, réponses). On va alors faire des hypothèses sur :
- les connaissances que ces élèves associent au concept dans ce type de problèmes, celles qu'ils mettent en oeuvre pour le résoudre ;
- les propriétés qu'ils attribuent au concept (aspect objet du concept) ;
- et ses différentes significations (à quoi il sert pour l'élève) (aspect outil du concept).

Ce modèle « conception » doit permettre non seulement de décrire des connaissances et leurs limites, mais aussi d'expliquer et de prévoir d'autres connaissances.
La validation d'une conception en tant que modèle didactique se fait par sa confrontation avec les faits observables et par l'étude de sa cohérence avec les théories dans lesquelles elle est développée.

Eléments de Bibliographie

Artigue M. (1988) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.9.3, pp.281-308.

Artigue M., Robinet J. (1982) Conception du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol.3 n°2, pp.5-64.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.7 n°2, pp.33-115.

Grenier D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6ème*. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Léonard F., Grisvard C. (1981) Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. *Bulletin de l'APMEP*, n°327.

Sierpinska A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.6.1,pp5-67.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.10 n°2-3, pp.133-170.