

## Connaissance, conception et obstacle. Exemples en mathématiques

### I. Bachelard et la notion d'obstacle épistémologique

La notion d'obstacle épistémologique a été introduite par Gaston Bachelard (1938) :

« Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes, comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons obstacles épistémologiques.[ ]. En fait, on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation. »

Pour Bachelard, un des premiers obstacles à surmonter est l'opinion :

« La science, dans son besoin d'achèvement comme dans son principe, s'oppose absolument à l'opinion.[ ]. On ne peut rien fonder sur l'opinion : il faut d'abord la détruire. Elle est le premier obstacle à surmonter. » (cité par Glaeser, RDM, 5.2).

Bachelard identifie, à partir d'exemples historiques, quelques grandes catégories d'obstacles : l'expérience première, la connaissance générale, l'obstacle verbal, l'utilisation abusive des images familières, la connaissance unitaire et pragmatique, l'obstacle substantialiste, l'obstacle réaliste, l'obstacle animiste, l'obstacle de la connaissance quantitative.

**Le premier obstacle : l'expérience première** « placée avant et au-dessus de la critique qui, elle, est nécessairement un élément intégrant de l'esprit scientifique ».

La thèse philosophique soutenue (p.23) : « l'esprit scientifique doit se former *contre* la Nature ». Il cite l'exemple de la peur du tonnerre, maintenant rationalisée (c'est l'éclair qui est dangereux).

En astronomie, beaucoup d'expériences premières amènent à des croyances fausses. Et la science est nécessaire pour les mettre en défaut. Revenir au sens du problème est le nerf du progrès. L'exemple de l'électricité est abondamment développé, ainsi que celui de l'alchimie.

### **La connaissance générale comme obstacle à la connaissance scientifique**

« Rien n'a plus ralenti les progrès de la connaissance scientifique que la fausse doctrine du **général** qui a régné d'Aristote à Bacon inclus et qui reste, pour tant d'esprits, une doctrine fondamentale du savoir ».

Quelle est la véritable attitude de la pensée scientifique moderne dans la formation des concepts ? « L'esprit scientifique peut se fourvoyer en suivant deux tendances contraires : l'attrait du singulier et l'attrait de l'universel. »

« pour englober des preuves expérimentales nouvelles, il faudra alors déformer les concepts primitifs, étudier les conditions d'application de ces concepts et surtout incorporer *les conditions d'application d'un concept dans le sens même du concept* ».

### **Un exemple d'obstacle verbal : L'éponge. Extension abusive des images familières**

C'est le cas où une seule image, un seul mot constitue toute l'explication et prétend faire avancer la pensée abstraite.

L'image de l'éponge a paru suffisante au 18<sup>ème</sup> siècle pour expliquer des phénomènes physiques divers (la spongiosité de l'air, le fluide électrique). De même la notion de « pore » et les images associées ont été à la base des propriétés fondamentales de la matière, empêchant tout autre regard sur celle-ci.

## **II. La notion d'obstacle en mathématiques et en didactique des mathématiques**

Pour Bachelard, le cas des mathématiques est particulier :

« En fait, l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas de périodes d'erreurs. Aucune des thèses que nous soutenons dans ce livre ne vise donc la connaissance mathématique. Elles ne traitent que de la connaissance du monde objectif. »

Cependant, dès le début de ses recherches sur l'enseignement, (CIEAEM, 1976) Brousseau a étudié l'intérêt de cette notion pour la didactique des mathématiques, en la reliant à une nouvelle analyse de l'erreur. Par la suite, de nombreux travaux ont cherché à repérer des obstacles (dans un sens plus large) dans la construction de certains concepts mathématiques, aussi bien dans l'histoire que chez l'élève actuel.

**Brousseau** distingue en particulier quatre types d'obstacles qui se différencient par leur origine (le 4<sup>ème</sup> a été évoqué plus tardivement que les autres).

- **L'obstacle épistémologique**, lié au développement historique des connaissances et dont le rejet a dû être intégré explicitement dans le savoir transmis.

- **L'obstacle ontogénétique**

Ce sont des schèmes ou des modèles spontanés qui apparaissent « naturellement » au cours du développement. L'obstacle est du aux limitations de ces modèles.

- **L'obstacle didactique**, connaissances résultant d'une transposition didactique, semble ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif.

- **L'obstacle culturel**, connaissances véhiculées par le contexte culturel, déjà traitées scientifiquement, mais toujours présentes.

Brousseau retient surtout de Bachelard l'idée que l'on connaît contre une connaissance antérieure :

« L'apprentissage se fait par la mise à l'essai de conceptions successives, provisoirement et relativement bonnes qu'il faudra rejeter à chaque fois ou reprendre en une véritable genèse à chaque fois. » (Brousseau, RDM 4.2).

Le point de vue qu'il adopte dans tous ses travaux se situe dans la logique des travaux de Piaget, puisqu'il se place dans le cadre de l'apprentissage par adaptation :

« L'apprentissage est une adaptation de l'élève à une situation-problème nouvelle. Les difficultés qu'il rencontre sont donc fondamentales pour provoquer cette adaptation. » (RDM, 1.1).

Les connaissances se construisent donc comme réponses à une situation dans laquelle les connaissances anciennes se révèlent insuffisantes.

« Autrement dit, pour comprendre l'apprentissage des décimaux, il faut chercher *quelles sont les situations-problèmes* dans lesquelles ils sont de façon évidente une meilleure solution que les anciennes structures, en particulier celles déjà connues de l'enfant. » (op.cit.).

Dans cette perspective, les connaissances mises en place par les élèves sont forcément locales, c'est-à-dire ayant un *domaine de validité* restreint. On peut donc s'attendre à ce que, à un moment donné, il soit nécessaire de remettre ces connaissances en question, voire de les rejeter. L'erreur est alors la manifestation soit d'une difficulté soit d'un obstacle.

### III. Caractérisation de l'obstacle par rapport à la difficulté

Cette notion d'obstacle va être interprétée et utilisée par de nombreux chercheurs. En particulier, G. Glaeser dans son article « Épistémologie des nombres négatifs » (RDM, 1981) donne une liste d'obstacles, en termes de difficultés, inaptitudes, qui suscitera une vive controverse et donnera lieu à une réponse de Brousseau lui rappelant la différence entre difficulté et obstacle en le renvoyant à Duroux.

Duroux (Petit x, 1983) propose une caractérisation des obstacles, qui a été souvent reprise dans les travaux en didactique des mathématiques.

- « a) Un obstacle sera une connaissance, une conception, pas une difficulté ou un manque de connaissance.
- b) Cette connaissance produit des réponses adaptées dans un certain contexte, fréquemment rencontré.
- c) Mais elle engendre des réponses fausses hors de ce contexte. Une réponse correcte et universelle exige un point de vue notablement différent.
- d) De plus, cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. Il ne suffit pas de posséder une meilleure connaissance pour que la précédente disparaisse (ce qui distingue le franchissement d'obstacles de l'accommodation de Piaget). Il est donc indispensable de l'identifier et d'incorporer son rejet dans le nouveau savoir.
- e) Après la prise conscience de son inexactitude, elle continue de se manifester de façon intempestive et opiniâtre. »

H. El Bouazzaoui (thèse, p.32-33) précise cette distinction entre difficulté et obstacle dans un paragraphe « Obstacle et difficulté en mathématiques », en faisant un parallèle entre le point de vue historique et le point de vue cognitif.

« Si le problème qui se pose, à une époque donnée, dans une certaine théorie mathématique, vient à être résolu sans que sa solution ne remette en cause de façon décisive le point de vue de la théorie en question, dans un tel cas, on dit qu'une difficulté a été vaincue. Le signe qu'il y a eu difficulté, c'est que les mathématiques de l'époque ont été bloquées, même si les moyens de la résoudre étaient peut-être déjà disponibles....

On peut parler de la même façon de difficulté dans l'évolution des conceptions d'une notion mathématique chez un individu ou dans la genèse d'une notion.

"Si, par contre, le problème qui se pose vient à être résolu après avoir exigé une restructuration de la connaissance et un changement important de point de vue, alors on dit qu'un obstacle a été surmonté. Le signe qu'il y a eu obstacle, c'est que la théorie de l'époque a freiné et empêché la résolution du problème.

De la même façon, on peut parler d'obstacle dans l'évolution des conceptions d'une notion mathématique chez un individu ou dans la genèse d'une notion. »

M.J. Perrin-Glorian, dans son article « Utilisation de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques » (cahier du séminaire R2I, année 92-93, IUFM de Grenoble), reprend elle

aussi la définition de Duroux, qu'elle commente ainsi :

« Cette caractérisation est surtout formulée en termes cognitifs, mais si G. Brousseau reconnaît la nature cognitive des obstacles, il insiste aussi sur le « caractère social et culturel des obstacles autant et même plus que leur aspect simplement psychologique et cognitif. ». Elle rappelle que « Seuls les obstacles d'origine épistémologique sont constitutifs de la connaissance, ce sont ceux auxquels "on ne peut ni ne doit échapper" et qu'on peut en principe retrouver dans l'histoire même du concept. ».

#### IV. Différents processus de production des obstacles

M. Artigue, dans son article « Épistémologie et didactique » (cahier didirem, n°3, juin 89) donne une analyse détaillée de la manière dont est récupérée cette notion en didactique des mathématiques. Elle étudie en particulier les rapports entre épistémologie et obstacles dans les travaux de Glaeser (nombres négatifs), Cornu et Sierpiska (notion de limite) et conclut : « Mais, de ces travaux, on retire l'impression que, ce qui fonde en quelque sorte les obstacles épistémologiques, c'est leur apparition et leur résistance dans l'histoire des concepts considérés, ainsi que l'observation de conceptions analogues chez les élèves, plus que l'attestation de la résistance de ces conceptions chez les élèves actuels.

Or, cette condition me semble essentielle : du fait de la disparité des contraintes qui gouvernent les deux systèmes, l'analyse historique peut aider le didacticien dans sa recherche des noeuds de résistance de l'apprentissage, elle ne peut en aucun cas apporter à elle seule la preuve de l'existence de tel ou tel obstacle pour les élèves actuels.

Et ce, d'autant plus que l'on constate que les noeuds actuels de résistance sévère correspondent souvent aux points où un obstacle d'origine épistémologique intervient renforcé par un obstacle d'une autre origine, en particulier un obstacle d'origine didactique. »

Elle précise plus loin l'intérêt (et les limites) de l'analyse historique pour la didactique :

« Compte tenu des disparités entre les conditions des genèses historique et scolaire, il semble même raisonnable de faire l'hypothèse de l'existence pour l'enseignement actuel de noeuds de résistance qui fonctionnent comme ont fonctionné les obstacles épistémologiques dans le développement des mathématiques, sans qu'il soit possible pour autant de leur attribuer historiquement le statut d'obstacle.[ ]. Ceci nous renvoie inévitablement ... à une identification des processus producteurs d'obstacles en mathématiques. »

M. Artigue cite enfin comme exemples de processus producteurs d'obstacles :

- la généralisation abusive (ce qui justifierait que l'on considère N comme obstacle épistémologique à D) ;
- la régularisation formelle abusive (peut-être à l'oeuvre dans  $(a+b)^2 = a^2+b^2$ ) ;
- la fixation sur une contextualisation ou une modélisation familières (deux exemples dans l'article de Glaeser : l'attachement exclusif de la notion de nombre à celle de grandeur et la fixation sur le modèle additif des pertes et des gains) ;
- l'amalgame de notions sur un support donné (obstacle géométrique à propos des limites pour la différenciation de certaines propriétés sur les fonctions).

Elle termine en soulignant que les didacticiens « ne se situent pas tous dans une approche en termes d'obstacles épistémologiques ». Deux raisons à cela :

- le faible nombre d'obstacles épistémologiques attestés comme tels dans les travaux de didactique ;
- les « implications pédagogiques pressenties d'un ralliement à cette approche ».

M. Artigue, dans un autre article, (RDM 10- 2.3) précise à nouveau qu'elle conçoit la place de l'analyse historique dans les recherches en didactique comme aide à la recherche des

résistances dans l'apprentissage d'une notion ; en particulier, pour repérer les obstacles épistémologiques liés aux mathématiques enseignées à l'école. Elle argumente alors sur l'intérêt et la nécessité d'une mise en relation des obstacles historiques avec les conceptions mises en oeuvre par les élèves dans des situations de classe pour déterminer ceux de ces obstacles qui sont actuels pour les élèves.

## V. Deux exemples particuliers d'obstacles en mathématiques

**La connaissance des entiers** comme obstacle à la connaissance des décimaux. Certains aspects de cette connaissance sont repérés comme obstacle didactique (définitions, écritures), d'autres comme obstacle épistémologique (la connaissance des entiers et de leurs propriétés sont nécessaires à la construction des décimaux).

De nombreux travaux se sont penchés sur les difficultés liées à l'apprentissage de la **notion de limite** dont Cornu (1983), Sierpiska (1985) et Schneider (1991). Cornu a relevé, chez de nombreux étudiants de début d'université, une conception dynamique et monotone de la notion de limite qui empêche la mise en place de certaines propriétés fondamentales du concept mathématique. Sierpiska (RDM, 1985) a précisé les travaux de Cornu et propose une liste de cinq types d'obstacles relatifs à la notion de limite.

1. **horror infiniti**, qui regroupe les obstacles suivants :
  - refus de considérer le passage à la limite comme une opération mathématique ;
  - transfert automatique des méthodes d'algèbre aux grandeurs infinies ;
  - association du passage à la limite à un mouvement, à un rapprochement.
2. obstacles liés au concept de fonction : monotonie, bornes sup et inf, suite de valeurs.
3. obstacles géométriques :
  - intuition géométrique comme obstacle à la formulation d'une définition rigoureuse ;
  - limite comme borne d'un ensemble.
4. obstacles logiques, liés au problème des quantificateurs ;
5. obstacle du symbole.

## Références bibliographiques

- Artigue M. : *Epistémologie et didactique*, RDM, Vol. 10.2.3., 1991, p.241-286.
- Bachelard G. : *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Librairie J. Vrin, 1938
- Brousseau G. : *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, RDM, Vol.4.2, 1983, p.164-198.
- Brousseau G. : *Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques*, in *Constructions de savoirs. Obstacles et conflits*. CIRADE Actes du Colloque International "Obstacle épistémologique et conflit cognitif", Montréal, 1988.
- Cornu B. : *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*. Thèses de 3ème cycle, Université de Grenoble 1, 1983.
- Duroux A. : *La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure*, Petit x, n°3, 1983.
- El Bouazzaoui H. : *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, 1988.
- Glaeser G. : *Épistémologie des nombres relatifs*, RDM, Vol.2.3, 1981, p.303-346.
- Grisvard C. et Léonard F. : *Résurgence de règles implicites dans la comparaison des nombres décimaux*, Bulletin APMEP, n°340, 1983.
- Perrin-Glorian M.J. : *Utilisation de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques*, cahier du séminaire Recherche/Réflexion/Interaction, 1993. IUFM de Grenoble.
- Robert A. : *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*. Thèse d'état, Université Paris 7, 1982.
- Sierpiska A. : *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*, RDM, Vol.6.1, 1985, p.5-67.
- Schneider M. : *Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides*. RDM, Vol.11.2.3, 1991, p.241-294.
- Vergnaud G. : *Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques*, CIRADE (op.cit.).