Math F2 Partiel d'Algèbre N°1 (Mars 2005)

Corrigé : David RENAUDIE

EXERCICE I :

1) On calcule :

$$B = PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme P est inversible, elle correspond à un produit de matrices élémentaires, donc B est ligne-équivalente à A. On note : $B \sim A$.

2) a) En appliquant successivement les opérations élémentaires suivantes : $L_3(-1/3)$, $L_{13}(-1)$ puis $L_{23}(1)$, on trouve R la l.r.e. de B (donc de A vu que $B \sim A$)

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) R possède trois colonnes pivots donc rang(R)=3.

3) D'après le Théorème 4 (3^e propriété), on a, par lecture directe de R, toutes les combinaisons linéaires (non redondantes !) entre colonnes de R
(donc de A vu $A \sim R$). Les voici (avec A^i la i-ième colonne de A) :
$A^3=3A^1+2A^2$; $A^4=A^1+A^2$; $A^6=2A^1+A^2+A^5$; $A^7 = 2A^1+A^2-A^5$

4) P est inversible car on a trouvé une matrice R, l.r.e., telle que $A \sim R$. Cela signifie que P correspond à une suite d'opérations élémentaires, donc est un produit de matrices élémentaires, et par conséquent est inversible. Nul besoin de calculer P^{-1}.

EXERCICE II :

1) $I \in \mathcal{E}$ car $I = M_{(1,0,0)}$ $B \in \mathcal{E}$ car $B = M_{(0,1,0)}$ et $C \in \mathcal{E}$ car $C = M_{(0,0,1)}$.

2) B n'est pas inversible car contient 2 lignes identiques, donc est de rang < 3.
C est inversible car est une matice élémentaire correspondant à l'opération élémentaire L_{13}.

3) a) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $BC = CB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $B^2 = I + C$; $C^2 = I$; $BC = B$; $CB = B$

c) $B^2 \in \mathcal{E}$ car $B^2 = M_{(1,0,1)}$. De plus, C^2, BC et CB sont aussi des matrices de $\mathcal{E}$ car on a prouvé (question 1) que I et B sont des matrices de $\mathcal{E}$.

4) $\alpha I+\beta B+\gamma C=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha+\gamma & \beta \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0)$

5) Le même calcul que ci-dessus avec a, b, c à la place de $\alpha, \beta, \gamma\ \delta$ donne bien :

$$M_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

On en déduit que «toute matrice $M_{(a,b,c)}$ de $\mathcal{E}$ s'écrit comme combinaison linéaire de I, B et C.

6) Soient $M_1 = M_{(a_1,b_1,c_1)}$ et $M_2 = M_{(a_2,b_2,c_2)}$ deux matrices de $\mathcal{E}$. Montrons que M_1+M_2 est aussi une matrice de $\mathcal{E}$. Or $M_1 + M_2 = (a_1+a_2)I + (b_1+b_2)B + (c_1+c_2)C = M_{(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)}$, CQFD.

7) Avec les mêmes notations, Formons le produit M_1M_2 et montrons qu'il appartient à $\mathcal{E}$. Après calcul du produit, utilisation des 4 formules de la question 3b, et factorisation, nous obtenons :
$M_1M_2 = (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)I + (a_1b_2 + a_2b_1 + b_1c_2 + b_2c_1)B + (a_1c_2 + b_1b_2 + a_2c_1)C$ donc
$M_1M_2 = M_{(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2,\, a_1b_2+a_2b_1+b_1c_2+b_2c_1,\, a_1c_2+b_1b_2+a_2c_1)}$ qui est bien une matrice de $\mathcal{E}$.

8) On considère la matrice $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}B$

a) $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = A$; $A^4 = A.A^3 = A.A = A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) Si n pair : $A^n = A^2 = \dfrac{1}{2}B^2 = \dfrac{1}{2}(I+C)$. Si n impair : $A^n = A$

9)

a) $D = M_{(1,\sqrt{2},0)} = I + \sqrt{2}B = I + \sqrt{2}(\sqrt{2}A) = I + 2A$

b) I et $2A$ commutent, donc on peut leur appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, D^n = (2A+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2A)^k I^{n-k} = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k A^k I^{n-k} = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k A^k$$

$$D^n = I + \sum_{k\ impair}^{n} \binom{n}{k} 2^k A^k + \sum_{k\ pair \neq 0}^{n} \binom{n}{k} 2^k A^k = I + \underbrace{\left(\sum_{k\ impair}^{n} \binom{n}{k} 2^k \right)}_{\alpha_n} A + \underbrace{\left(\sum_{k\ pair \neq 0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \right)}_{\beta_n} A^2 \quad \text{en utilisant 8b)}$$

c) $D^n = I + \alpha_n A + \beta_n A^2 = I + \alpha_n \dfrac{B}{\sqrt{2}} + \beta_n \dfrac{I+C}{2} = \left(1 + \dfrac{\beta_n}{2}\right) I + \dfrac{\alpha_n}{\sqrt{2}} B + \dfrac{\beta_n}{2} C$

d) Formule du binôme : $3^n = (2+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k$

On en déduit : $3^n = 1 + \displaystyle\sum_{k\ impair}^{n} \binom{n}{k} 2^k + \sum_{k\ pair \neq 0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 1 + \alpha_n + \beta_n$

De même : $(-1)^n = \left((-2)+1\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k 1^{n-k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^k 1^{n-k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^k$

On en déduit : $(-1)^n = 1 + \displaystyle\sum_{k\ impair}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(-1)^k}_{-1} 2^k + \sum_{k\ pair \neq 0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(-1)^k}_{+1} 2^k = 1 - \alpha_n + \beta_n$

e) $\begin{cases} 1 + \alpha_n + \beta_n = 3^n & (l_1) \\ 1 - \alpha_n + \beta_n = (-1)^n & (l_2) \end{cases} \xrightarrow{l_1+l_2} 2 + 2\beta_n = 3^n + (-1)^n \longrightarrow \beta_n = \dfrac{3^n + (-1)^n - 2}{2}$

$\xrightarrow{l_1-l_2} 2\alpha_n = 3^n - (-1)^n \longrightarrow \alpha_n = \dfrac{3^n - (-1)^n}{2}$

10) En repartant de 9c), on obtient finalement :

$$D^n = \left(1 + \frac{3^n + (-1)^n - 2}{4}\right) I + \left(\frac{3^n - (-1)^n}{2\sqrt{2}}\right) B + \left(\frac{3^n + (-1)^n - 2}{4}\right) C$$

Foire aux perles

EXERCICE I :

- *P* est une matrice triangulaire inférieur, donc elle est inversible et son inverse est la matrice triangulaire supérieur qui lui est symétrique.
- *P* est inversible mais n'admet qu'un inverse à gauche car elle possède une diagonale nulle à droite.
- Pour justifier que P est réversible il faut multiplier la matrice *P* par la matrice identité. Or $PI=P$ donc *P* est réversible.

EXERCICE II :

- *I*, *B*, *C* sont des matrices de *E* car si on remplace *a*, *b* et *c* par les valeurs de *I*, *B* et *C*, elles vérifient toutes les 3 l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ désigné par *E*.
- *B* et *C* sont des matrices carrées, elles sont donc a priori inversibles.
- L'inverse de *B* est la matrice Identité *I*
- $1+2^n=3^n$
- Pour *B*, on remarque (intuitivement) qu'il est très facile de calculer sa LRE, elle est donc inversible.
- *B* et *C* sont inversibles car $BC=CB$
- $D=I+1/A$
- $B = (1\ 0\ 3\ 1\ 1\ 3\ 1)$ c'est donc la ligne réduite échelonnée de *A*.